Středoškolská odborná činnost 2005/2006

Obor 01 – matematika a matematická informatika

Gaussovská prvočísla

Autor:
Jakub Opršal
Gymnázium Brno, tř. Kpt. Jaroše 14,
658 70 Brno, 4.A

Konzultant práce:
Mgr. Viktor Ježek
(Gymnázium Brno, tř. Kpt. Jaroše 14)

Zadavatel práce:

Brno, 2006
Jihomoravský kraj

Prohlašuji, že jsem předloženou práci zpracoval samostatně a použil jen uvedené prameny a literaturu.

Jakub Opršal

V Brně dne 6.1.2006

Abstrakt

Tato práce popisuje konkrétní část matematiky – Gaussova prvočísla, respektive teorii kolem Gaussových celých čísel a její základní věty. Kromě této problematiky řeší některé části teorie čísel (zvláště Legendreovy symboly) a komplexní čísla.

Gaussova celá čísla jsou komplexní čísla s celočíselnou reálnou a imaginární částí. V této množině můžeme definovat dělitelnost obdobně jako v celých číslech. Pokud se hlouběji ponoříme, zjistíme, že Gaussova čísla mají vlastnosti velmi podobné číslům celým, např. věty o dělitelnosti, největší společní dělitelé, Euklidův algoritmus, Bezoutova věta, rozklad na prvočinitele a další.

Za zmínku stojí zvlášt Euklidův algoritmus, který je běžně založen na dělení se zbytkem. Náš Euklidův algoritmus, tak jak je popsán v této práci, je založen na podobných základech, ale samotné dělení se zbytkem nepoužívá, a proto se dělením se zbytkem, které je v Gaussových číslech značně složitější než v celých číslech, nemusíme zabývat.

Naším cílem bylo krom dokázání všech základních vět i popsat tvar Gaussových prvočísel (v závislosti na běžných prvočíslech). Dokázání takového faktu nám zjednoduší hledání Gaussových prvočísel, protože velké množství běžných prvočísel známe. A krom toho nám problém rozhodnutí, zda dané Gaussovo číslo je prvočíslo, převádí na více řešený problém o rozhodnutí, zda je celé číslo prvočíslem.

Gaussova čísla mají mnoho uplatnění v běžné teorii čísel. Velmi jednoduše lze například zapsat dané číslo jako součet dvou druhých mocnin pomocí rozkladu na Gaussovy prvočinitele. V závěru práce také ukazujeme použití na jednom konkrétním příkladě z letošního ročníku matematické olympiády.

Obsah

1. Vybrané kapitoly z teorie čísel

V této kapitole bychom rádi čtenářovi přiblížili některé kapitoly z teorie čísel, které se běžně neučí na střední škole a které budeme v dalších kapitolách využívat. Všechna obecně známá tvrzení neuvádíme a nedokazujeme, můžete je nalézt i s důkazy v [2].

1.1. Kongruence

Def. Říkáme, že a je *kongruentní* s b modulo c právě tehdy, když a a b dávají stejný zbytek po dělení číslem c. Píšeme $a \equiv b \,(\mathrm{mod}\, c)$.

Věta 1.1.1 $a \equiv b \,(\mathrm{mod}\, m) \iff \exists t \in \mathbb{Z} : a = mt + b \iff m \mid (a - b)$

Důkaz této věty spolu s dalšími vlastnostmi kongruencí naleznete v [2] od strany 178.

1.2. Kvadratické zbytky

Budeme-li zkoumat zbytky druhých mocnin celých čísel po dělení nějakým číslem n snadno zjistíme, že mohou nabývat jen některých hodnot. Které zbytky můžeme dostat snadno ověříme, dosadíme-li do kongruence všechny možné zbytky a umocníme je postupně na druhou, například druhé mocniny mohou modulo 8 nabývat jen zbytky:

$$\begin{aligned} 0^2 &\equiv 0 \pmod 8 & \qquad 4^2 &\equiv 16 \equiv 0 \pmod 8 \\ 1^2 &\equiv 1 & 5^2 &\equiv 25 \equiv 1 \\ 2^2 &\equiv 4 & 6^2 &\equiv 36 \equiv 4 \\ 3^2 &\equiv 9 \equiv 1 & 7^2 &\equiv 49 \equiv 1 \end{aligned}$$

Def. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Říkáme, že číslo $a \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ je *kvadratickým zbytkem* modulo n pokud existuje celé číslo c takové, že $c^2 \equiv a \,(\mathrm{mod}\, n)$. V opačném případě nazveme číslo a *kvadratickým nezbytkem* modulo n.

Krom modulu 8 jsou zajímavé ještě kvadratické zbytky všech jednociferných modulů. Často se dají využít v úlohách z teorie čísel. Přehledně je udává následující tabulka:

3,4	0,1	**7**	0,1,2,4
5	0,1,4	**8**	0,1,4
6	0,1,3,4	**9**	0,1,4,7

Věta 1.2.1 Nechť p je liché prvočíslo, pak existuje právě $\frac{p-1}{2}$ nenulových kvadratických zbytků modulo p.

Důkaz: Všechny nenulové kvadratické zbytky modulo p najdeme tak, že vezmeme čísla $1, 2, \ldots, p-1$ a umocním je na druhou. Uvědomme si, že platí:

$$\begin{aligned} x_1^2 &\equiv x_2^2 \pmod p \\ x_1^2 - x_2^2 &\equiv 0 \\ (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) &\equiv 0 \\ x_1 &\equiv \pm x_2 \end{aligned}$$

Tedy kvadráty dvou různých čísel x_1 a x_2 z množiny $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ dávají stejný zbytek po dělení p právě tehdy, když $x_1 \equiv -x_2$. Můžeme tedy tato čísla rozdělit do dvojic, podle kvadratického zbytku a těchto dvojic je pak $\frac{p-1}{2}$.

Přímým důsledkem věty 1.2.1 je tvrzení, že existuje právě $\frac{p-1}{2}$ kvadratických nezbytků modulo lichým prvočíslem p.

1.3. Legendreovy symboly

Ještě si zobecníme definici kvadratického zbytku pro všechna celá čísla logickým rozšířením:

Def. Nechť $n \in \mathbb{Z}$, pak celé číslo a nazveme *kvadratický zbytkem* modulo n právě tehdy, když existuje $c \in \mathbb{Z} : c^2 \equiv a \,(\mathrm{mod}\, n)$.

Def. Mějme liché prvočíslo p a celé číslo a, pak číslo $\left(\frac{a}{p}\right)$ nazýváme *Legendreovým symbolem* a definujeme takto:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} +1 & \text{když } a \text{ je nenulovým kvadratickým zbytkem modulo } p \\ 0 & \text{pro } p \mid a \\ -1 & \text{když } a \text{ není kvadratickým zbytkem modulo } p \end{cases}$$

Věta 1.3.1 Pokud $a \equiv b \,(\mathrm{mod}\, p)$ pak $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$

Důkaz: Zřejmý.

Věta 1.3.2 (Eulerovo kritérium) Pro každé celé a a p liché prvočíslo platí: $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \,(\mathrm{mod}\, p)$.

Důkaz: Případ $p \mid a$ je jednoduchý, zaměřím se tedy na případ $\mathcal{NSD}(a, p) = 1$. Podle malé Fermatovy věty platí:

$$\begin{aligned} a^{p-1} &\equiv 1 \pmod{p} \\ (a^{\frac{p-1}{2}} + 1)(a^{\frac{p-1}{2}} - 1) &\equiv 0 \pmod{p} \end{aligned}$$

Tedy $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1$.

Je-li a kvadratický zbytek pak platí, že existuje $c \in \mathbb{Z}$ takové, že $c^2 \equiv a$ tedy $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv c^{p-1} \equiv 1$ (opět podle malé Fermatovy věty), tedy pro kvadratický zbytek věta platí. Navíc žádné jiné číslo kromě $\frac{p-1}{2}$ nenulových kvadratických zbytků modulo p nemůže splňovat $a^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0$, protože levá strana této kongruence je mnohočlen stupně $\frac{p-1}{2}$ a proto má tato rovnice nejvýše $\frac{p-1}{2}$ kořenů modulo p. Tedy pro kvadratické nezbytky platí: $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1$.

Věta 1.3.3 Nechť $a, b \in \mathbb{Z}$; p je liché prvočíslo, pak platí: $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \cdot \left(\frac{b}{p}\right)$

Důkaz: Podle věty 1.3.2 platí:

$$\left(\frac{ab}{p}\right) \equiv (ab)^{\frac{p-1}{2}} = a^{\frac{p-1}{2}} \cdot b^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \cdot \left(\frac{b}{p}\right)$$

A protože Legendreovy symboly mohou nabývat pouze hodnot 0, 1 a -1 a zároveň jsou tato čísla nekongruentní modulo p, pak z této kongruence vyplývá rovnost $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \cdot \left(\frac{b}{p}\right)$.

Věta 1.3.4 Pro každé prvočíslo p tvaru $4k + 1$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $p \mid n^2 + 1$.

Důkaz: Stačí dokázat, že číslo -1 je kvadratický zbytek modulo p.

Spočteme si symbol:

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = (-1)^{\frac{4k+1-1}{2}} = (-1)^{2k} = 1.$$

Proto číslo -1 je kvadratickým zbytkem modulo p.

2. Komplexní čísla

V této kapitole bychom chtěli čtenáři přiblížit základy komplexních čísel.

2.1. Zavedení komplexních čísel

Def. *Komplexním číslem* rozumíme uspořádanou dvojici (a, b) reálných čísel a a b. Množinu všech komplexních čísel označíme $\mathbb{C}$. Na komplexních čísel definujeme relaci $=$:

$$(a_1, a_2) = (b_1, b_2) \iff a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2,$$

operace $+$ (sčítání) a $\cdot$ (násobení) následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}(a_1, a_2) + (b_1, b_2) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2),\\ (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) &= (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1).\end{aligned}$$

Znaménko $\cdot$ u operace násobení obvykle vynecháváme.

Věta 2.1.1 Pro všechna komplexní čísla (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) platí:
$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (b_1, b_2) + (a_1, a_2)$
$(a_1, a_2) + \big((b_1, b_2) + (c_1, c_2)\big) = \big((a_1, a_2) + (b_1, b_2)\big) + (c_1, c_2)$
$(a_1, a_2) + (0, 0) = (a_1, a_2)$
$(a_1, a_2) + (-a_1, -a_2) = (0, 0)$
$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (b_1, b_2) \cdot (a_1, a_2)$
$(a_1, a_2) \cdot \big((b_1, b_2) \cdot (c_1, c_2)\big) = \big((a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2)\big) \cdot (c_1, c_2)$
$(a_1, a_2) \cdot (1, 0) = (a_1, a_2)$
$\forall (a_1, a_2) \neq (0, 0) \implies (a_1, a_2) \cdot \left(\frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2}, \frac{-a_2}{a_1^2 + a_2^2}\right) = (1, 0)$
$(a_1, a_2) \cdot \big((b_1, b_2) + (c_1, c_2)\big) = (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) + (a_1, a_2) \cdot (c_1, c_2)$

Toto tvrzení se snadno dokáže rozepsáním a využitím vlastností reálných čísel.

Zavedeme-li bijekci mezi čísly $(a, 0)$ a a (kde $a \in \mathbb{R}$), zjistíme, že množina komplexních čísel tvaru $(a, 0)$ má stejné vlastnosti jako množina všech reálných čísel. Proto můžeme tyto dvě množiny prohlásit za totožné a budeme psát $(a, 0) = a$.

Def. Komplexní číslo $(0, 1)$ nazýváme *imaginární jednotkou*, obvykle značíme i.

Věta 2.1.2 Každé komplexní číslo (a, b) lze zapsat jako $a + bi$.

Důkaz: Vyplývá z jednoduchého rozepsání komplexního čísla:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1) = a + bi$$

Uvědomme si, že $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$. Pak dvě komplexní čísla můžeme násobit jako dvojčleny:

$$(a + bi)(c + di) = ac + bci + adi + bdi^2 = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

Podobně také můžeme dvě komplexní čísla dělit (respektive hledat číslo inverzní k nějakému nenulovému komplexnímu číslu):

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} i$$

Tento postup nazýváme *usměrňování* komplexního zlomku.

Def. Nechť $z = a+bi$ je komplexní číslo. Pak reálné číslo a resp. b nazýváme *reálnou částí čísla* z (píšeme $\Re(z) = a$) resp. *imaginární částí čísla* z (píšeme $\Im(z) = b$).

Platí $\forall z \in \mathbb{C} : z = \Re(z) + \Im(z) \cdot i$.
Dále si uvědomme, že každé reálné číslo a, lze zapsat jako $a + 0i$, to znamená, že $\forall a \in \mathbb{R} : \Re(a) = a \wedge \Im(a) = 0$.

Def. Komplexní číslo, které má nulovou reálnou a nenulovou imaginární část nazýváme *ryze imaginární číslo*. Komplexní číslo, které má nenulovou imaginární část pak pouze *imaginární číslo*.

2.2. Absolutní hodnota, goniometrický tvar komplexního čísla

Def. Nechť $z \in \mathbb{C}, z = a + bi$, pak komplexní číslo $\overline{z} = a - bi$ nazýváme číslem *komplexně sdruženým* s číslem a.

Platí $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$. Snadno ověříme, protože $z \in \mathbb{R} \iff \Im(z) = 0$ a $\Im(z) = -\Im(\overline{z})$. Pokud tedy má platit $z = \overline{z}$ pak $\Im(z) = -\Im(z) \implies \Im(z) = 0$ a naopak.

Def. Nechť $z \in \mathbb{C}, z = a + ib$ pak reálné číslo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ nazýváme *absolutní hodnotou* čísla z.

Věta 2.2.1 Nechť $z \in \mathbb{C}$ pak platí: $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$

Důkaz: Nechť $z = a + ib$, pak $\overline{z} = a - ib$ a $z \cdot \overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$.

Věta 2.2.2 (goniometrický tvar komplexního čísla) Pro každé komplexní číslo z existuje reálné číslo φ takové, že platí:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Důkaz: Nechť $z = a + bi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Pak $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ a protože platí $a < |z|$, pak existuje φ takové, že $|z| \cdot \cos\varphi = a$. Navíc pro takové φ platí $|z| \cdot \sin\varphi = b$, protože:

$$\begin{aligned} |z|^2 &= a^2 + b^2 \\ |z|^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) &= a^2 + b^2 \\ (|z|\cos\varphi)^2 + (|z|\sin\varphi)^2 &= a^2 + b^2 \\ (|z|\sin\varphi)^2 &= b^2 \\ |z|\sin\varphi &= b \end{aligned}$$

V důkazu jsme navíc ukázali, jak se takové číslo φ dá najít.

Tomuto číslu říkáme *argument* čísla z (píšeme $\arg(z)$). Je známo, že takových čísel je víc, protože funkce sinus a kosinus jsou periodické a mají periodu 2π, proto pokud nějaké číslo φ splňuje zadání pak i všechna čísla, která dostaneme přičtením nebo odečtením násobku 2π jsou také vyhovující. Proto obvykle hledáme φ, které leží v intervalu $\langle 0, 2\pi)$. Takové číslo pak nazveme *hlavním argumentem* čísla z (píšeme $\mathrm{Arg}(z)$).

Věta 2.2.3 (násobení a dělení čísel v goniometrickém tvaru) Nechť $a = |a|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ a $b = |b|(\cos\psi + i\sin\psi)$ jsou dvě komplexní čísla v goniometrickém tvaru, pak platí:

$$\begin{aligned} ab &= |a||b|\big(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi)\big) \\ \frac{a}{b} &= \frac{|a|}{|b|}\big(\cos(\varphi - \psi) + i\sin(\varphi - \psi)\big) \end{aligned}$$

Tuto větu snadno dokážeme pomocí následujícího lemmatu:

Lemma. $\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)$

Důkaz: Podle součtových vzorců platí:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos\alpha\cos\beta+i^2\sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

Jednoduchým rozepsáním pak dostáváme:

$$\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta+i\sin\alpha\cos\beta+i\cos\alpha\sin\beta+i^2\sin\alpha\sin\beta=$$
$$=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)$$

A nyní se můžeme vrátit k důkazu věty 2.2.3:

$$ab=|a|(\cos\varphi+i\sin\varphi)\cdot|b|(\cos\psi+i\sin\psi)=|a||b|\big(\cos(\varphi+\psi)+i\sin(\varphi+\psi)\big)$$
$$\frac{a}{b}=\frac{|a|(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{|b|(\cos\psi+i\sin\psi)}=\frac{|a|}{|b|}\cdot\frac{(\cos\varphi+i\sin\varphi)(\cos\psi-i\sin\psi)}{(\cos^2\psi+\sin^2\psi)}=$$
$$=\frac{|a|}{|b|}\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)(\cos(-\psi)+i\sin(-\psi))=\frac{|a|}{|b|}\cdot\big(\cos(\varphi-\psi)+i\sin(\varphi-\psi)\big)$$

Věta 2.2.4 (Moivreova věta) Nechť $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ je goniometrický tvar komplexního čísla z pak pro každé $n\in\mathbb{N}$ paltí:

$$z^n=|z|^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$$

Důkaz: Matematickou indukcí:
I. $n=1$ Platí triviálně.
II. Přepokládejme, že $z^n=|z|^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$ pak:

$$z^{n+1}=z^n\cdot z=|z|^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)\cdot|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

Což podle předchozí věty je právě $|z|^{n+1}\big(\cos(n\varphi+\varphi)+i\sin(n\varphi+\varphi)\big)=|z|^{n+1}\big(\cos(n+1)\varphi+i\sin(n+1)\varphi\big)$.

Moivreova věta lze zobecnit i pro libovolnou celou mocninu. Stačí si uvědomit, že pro $n=0$ platí $z^0=|z|^0\cdot(\cos0+i\sin0)=1$ a pro $n<0$: $z^n=\big(z^{-1}\big)^{-n}$ a $z^{-1}=\frac{1}{z}$ je podle věty 2.2.3: $|z|^{-1}\cdot\big(\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)\big)$ a nyní už můžeme použít Moivreovu větu pro přirozené $-n$: $z^n=\big(z^{-1}\big)^{-n}=\big(|z|^{-1}\big)^{-n}\cdot\big(\cos(-n)(-\varphi)+i\sin(-n)(-\varphi)\big)=|z|^n\cdot(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$.

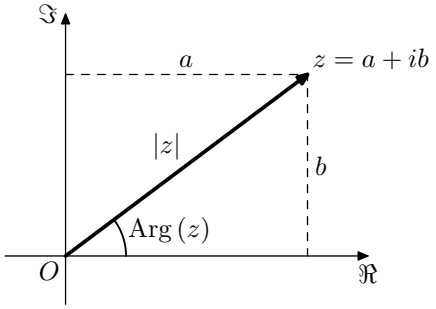
2.3. Gaussova rovina

Komplexní čísla jsou uspořádané dvojice čísel reálných, může nám to tedy připomenout souřadnicový systém v rovině. Můžeme tedy zavést bijekci mezi všemi komplexními čísly a všemi body v rovině.

Mějme rovinu s kartézským souřadným systémem. Komplexnímu číslu $a=a_1+ia_2$ přiřadíme bod $A[a_1,a_2]$ roviny a naopak. Tuto rovinu pak nazveme *Gaussovou rovinou*. Osu x Gaussovy roviny nazveme *reálnou osou* (značíme $\Re$) a osu y *imaginární* (značíme $\Im$). Podle výše uvedené bijekce budeme komplexní číslo nazývat jak komplexním číslem, tak bodem Gaussovy roviny.

Def. Bod $O=0+0i$ nazveme *počátkem* Gaussovy roviny.

Následující obrázek ukazuje geometrický význam některých vlastností koplexních čísel.

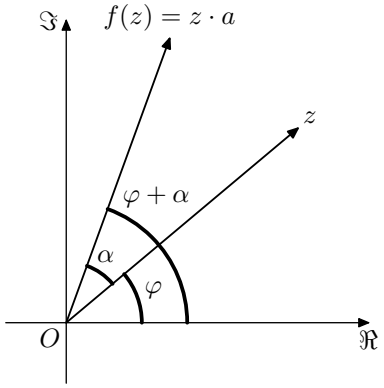


Otočení kolem počátku

Def. Zobrazení $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = z \cdot a$, kde $a \in \mathbb{C}$ je takové komplexní číslo, které lze zapsat ve tvaru $a = \cos\alpha + i \sin\alpha$, nazveme *otočením* kolem počátku o úhel α.

Toto otočení je zřejmě shodné s otočením, jak je známe z planimetrie, neboť:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$z \cdot a = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha) = |z|\big(\cos(\varphi+\alpha) + i\sin(\varphi+\alpha)\big)$$



Otočení o $\pm\frac{\pi}{2}$ je vlastně násobení číslem $\pm i$, o π (neboli středová souměrnost) je násobení číslem -1.

Obdobně se dají definovat i další zobrazení, která známe z planimetrie.

3. Celá komplexní čísla

Def. Množinu všech komplexních čísel $a+ib$ takových, že $a, b \in \mathbb{Z}$, nazýváme *množinou všech komplexních celých čísel* nebo také *množinou všech Gaussových celých čísel* (tuto množinu budeme značit $\mathbb{Z}[i]$).

Celá komplexní čísla jsou rozšířením celých čísel, nebo také zúžením komplexních.

3.1. Dělitelnost v celých komplexních číslech

Množina $\mathbb{Z}[i]$ je uzavřená vůči operacím $+$, $-$ a $\cdot$. Obdobně jak celá čísla však není uzavřená vůči operaci $/$, například:

$$\frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{1+3i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i \notin \mathbb{Z}[i]$$

Proto má, obdobně jako v celých číslech, smysl definovat dělitelnost.

Def. Pro $a, b \in \mathbb{Z}[i]$ říkáme, že $a \mid b$ právě tehdy, když existuje $c \in \mathbb{Z}[i]$ takové, že $a \cdot c = b$.

Věta 3.1.1 (Základní vlastnosti dělitelnosti) Pro všechna $a, b, c \in \mathbb{Z}[i]$ platí:

$$a \mid b \wedge b \mid c \implies a \mid c \tag{3.1.1.1}$$
$$a \mid b \wedge a \mid c \implies a \mid b + c \wedge a \mid b - c \tag{3.1.1.2}$$
$$c \neq 0 \implies (a \mid b \iff ac \mid bc) \tag{3.1.1.3}$$
$$a \mid b \wedge b \neq 0 \implies |a| \leq |b| \tag{3.1.1.4}$$

Důkaz: Tvrzení 1 až 3 se snadno dokáže rozepsáním z definice obdobně jako v celých číslech. Podrobněji se budeme věnovat čtvrtému tvrzení, protože se liší od běžné teorie čísel v celých číslech.

Jestliže $a \mid b$, pak existuje c takové, že $ac = b$, tedy podle věty (2.2.3) platí i $|a| \cdot |c| = |b|$. A protože $b \neq 0$ pak i $c \neq 0$, $|b| \neq 0$ a $|c| \neq 0$. Protože $|c| > 0$ a $c \in \mathbb{Z}[i]$, pak $|c| \geq 1$. Z toho plyne, že $|b| \geq |a|$.

V přirozených číslech je dělitelnost nejjednoduší, protože každé číslo n (vyjma jedničky) má právě dva nevlastní dělitele (tj. takové, které vždy musí mít) a to jsou 1 a n. V celých číslech se nám situace komplikuje a číslo n má čtyři nevlastní dělitele: -1, 1, $-n$ a n (samozřejmě kromě čísel 1 a -1, která mají pouze dva).

V komplexních číslech je situace ještě složitější a nevlastních dělitelů čísla $n \notin \{1, i, -1, -i\}$ je rovnou osm: 1, i, -1, $-i$, n, in, $-n$ a $-in$.

3.2. Největší společný dělitel a nejmenší společný násobek

Def. *Společným dělitelem* komplexních celých čísel a a b nazveme takové $c \in \mathbb{Z}[i]$, že $c \mid a \wedge c \mid b$.

Každá dvě čísla mají společné dělitele čísla 1, i, -1 a $-i$. Tato čísla mají v množině $\mathbb{Z}[i]$ stejné postavení, jako číslo 1 v množině $\mathbb{N}$, proto je budeme nazývat *jednotkami* a definujeme množinu $\mathcal{U} = \{1, i, -1, -i\}$ a obecně budeme značit její prvek u.

Násobení číslem u neovlivní dělitelnost, protože $\forall u_1 \in \mathcal{U}\ \exists u_2 \in \mathcal{U} : u_1 u_2 = 1$. A navíc $\forall a \in \mathbb{Z}[i], a \notin \mathcal{U} : a \not\mid u \wedge u \mid a$.

Def. Čísla a a b nazveme *shodnými* právě tehdy, když $\exists u \in \mathcal{U} : a = ub$.

Nechť a a b jsou dvě shodná čísla pak zřejmě platí: $\forall c \in \mathbb{Z}[i] : c \mid a \iff c \mid b$ a $a \mid c \iff b \mid c$.

Pokud budeme mluvit o jednoznačnosti vzhledem k dělitelnosti, budeme vždy mluvit o shodnosti takových čísel.

Přímým důsledkem věty 3.1.1.4 je tvrzení: $\forall a, b \in \mathbb{Z}[i] : a \mid b \wedge b \mid a \iff a$ a b jsou shodná.

Def. *Největším společným dělitelem* komplexních celých čísel a a b nazveme takové $c \in \mathbb{Z}[i]$, že c je dělitelné každým společným dělitelem čísel a a b. Budeme značit $c = \mathcal{NSD}(a, b)$.

Def. *Společným násobkem* komplexních celých čísel a a b nazveme takové $c \in \mathbb{Z}[i]$, že $a \mid c \wedge b \mid c$.

Každá dvě čísla a, b mají společné násobky např. čísla ab, iab, $-ab$, $-iab$. A navíc, pokud je nějaké číslo c společným násobkem čísel a a b pak i libovolný násobek čísla c je společným násobkem čísel a a b.

Def. *Nejmenším společným násobkem* komplexních celých čísel a a b nazveme takové $c \in \mathbb{Z}[i]$, že c dělí libovolný společný násobek čísel a a b. Budeme značit $c = \mathcal{NSN}(a, b)$.

Například společným násobkem čísel 2 a $3+i$ je číslo $4-2i$, neboť $4-2i = 2\cdot(2-i) = (3+i)(1-i)$. Další společný násobek je číslo $10 = 2 \cdot 5 = (3+i)(3-i)$. Všimněte si, že $4-2i$ dělí 10 a jejich podíl je $2+i$. Číslo $4-2i$ je totiž nejmenším společným násobkem čísel 2 a $3+i$. Protože $2 \nmid 3+i$ a naopak a nejmenším (podle absolutní hodnoty) dalším možným násobkem čísla $3+i$ je právě $4-2i$, pomocí věty 3.1.1.4 snadno ukážeme, že nejmenší společný násobek je mimo jiné také nejmenší podle absolutní hodnoty.

Jejich společným dělitelem je např. číslo $1+i$, protože $2 = (1+i)(1-i)$ a $3+i = (1+i)(2-i)$. A navíc je toto číslo i jejich největším společným dělitelem, protože číslo 2 je dělitelné pouze jednotkovými násobky čísel $1, 1+i$ a 2. A protože $2 \nmid 3+i$ a $1 \mid 1+i$. Obdobně jako u nejmenšího společného násobku i největší společný dělitel je největší podle absolutní hodnoty.

3.3. Obdoba Euklidova algoritmu a Bezoutovy věty

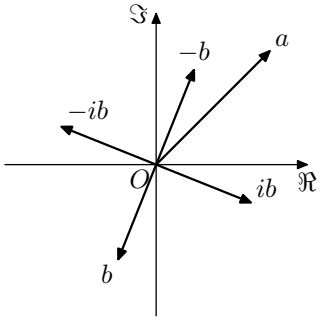
V této kapitole ukážeme, jak se dá najít největší společný dělitel a také jeho jednoznačnost.

Euklidův algoritmus

Hledejme $\mathcal{NSD}(a, b)$, kde $a, b \in \mathbb{Z}[i]$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $|b| \leq |a|$. Uvažujme čísla ub pro každé $u \in \mathcal{U}$. Představíme-li si tato čísla jako vektory v Gaussově rovině, pak jsou dvojice b, ib; $ib, -b$; $-b, -ib$ a $-ib, b$ dvojicemi na sebe kolmých vektorů a čísla $b, ib, -b, -ib$ tvoří vrcholy čtverce, který má střed v počátku (viz obrázek).

Vektor a pak svírá s jedním z těchto čísel úhel $\alpha \leq \frac{\pi}{4}$ (snadno ukážeme pomocí Dirichletova principu). Uvažuji-li trojúhelník, který má jeden vnitřní úhel menší nebo roven $\frac{\pi}{4}$, pak strana proti tomuto úhlu je určitě kratší než nejdelší strana tohoto trojúhelníku (např. ze sinové věty, za předpokladu, že funkce sinus je rostoucí na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$).

Proto můžeme říct, že existuje takové $u \in \mathcal{U}$, že $|a - ub| < |a|$.



Čísla b a $a - ub$ mají stejného největšího společného dělitele jako čísla a a b, protože:

$$\forall d \in \mathbb{Z}[i], d|b : d|a \iff d|a - ub$$

Zvolíme $a_1, b_1 = b, a - ub$ tak, aby znovu platilo $|b_1| \leq |a_1|$. A opakujeme postup tak dlouho, dokud jedno z čísel nevyjde nula. To se zcela jistě stane, protože absolutní hodnoty a_1, b_1 klesají a mohou nabývat jen

některých diskrétních hodnot (druhá mocnina je vždy nezáporné celé číslo). Proto se dříve nebo později dostanu k číslu 0.

Největším společným dělitelem nuly a nenulového čísla b_n je číslo b_n, protože nula je dělitelná libovolným $z \in \mathbb{Z}[i]$. Takové b_n pak je i největším společným dělitelem čísel a a b.

Věta 3.3.1 (Bezoutova věta) $\forall a, b \in \mathbb{Z}[i]\ \exists k, l \in \mathbb{Z}[i] : ka + lb = \mathcal{NSD}(a, b)$

Důkaz: Vyplývá z Euklidova algoritmu, budeme-li postupovat v opačném pořadí.

Vyjádříme $\mathcal{NSD}(a, b)$ nejdříve jako $a_n + ub_n$ a pak za a_n, respektive b_n, budeme dosazovat z předchozích vztahů. Budeme-li postupovat dál, z každé rovnice jsme schopni spočítat další (jeden) člen. A po konečném počtu kroků se dostaneme k vyjádření největšího společného dělitele pomocí čísel a a b.

Všichni společní dělitelé jsou po dvou shodná čísla. Toto tvrzení můžeme dokázat sporem. Předpokládejme, že existuje taková $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}[i]$, že $d_1 \not| d_2$ nebo $d_2 \not| d_1$ a zároveň jsou obě největším společným dělitelem a a b. Proto d_1 a d_2 jsou společní dělitelé a navíc největší společní dělitelé čísel a, b. Musí tedy platit, že d_1 i d_2 se dělí navzájem – spor.

Tímto jsme ukázali jednoznačnost největšího společného dělitele.

Def. Čísla $a, b \in \mathbb{Z}[i]$, pro která $\mathcal{NSD}(a, b) \in \mathcal{U}$, nazýváme *nesoudělná*.

Věta 3.3.2 Nechť $a, b, c \in \mathbb{Z}[i] \wedge \mathcal{NSD}(a, b) \in \mathcal{U}$ pak platí: $a \mid bc \implies a \mid c$.

Důkaz: Podle věty 3.3.1 existují čísla $k, l \in \mathbb{Z}[i]$ a $u \in \mathcal{U}$ taková, že $u \cdot \mathcal{NSD}(a, b) = 1 = ka + lb$. Vynásobíme-li tuto rovnost číslem c, dostáváme $c = kac + lbc$ a protože $a \mid kac \wedge a \mid lbc$ ($a \mid bc$) tak musí dělit i jejich součet, tedy $a \mid c$.

4. Gaussova prvočísla

Def. Číslo $z \in \mathbb{Z}[i]$, které má pouze nevlastní dělitele, nazveme *prvočíslem v komplexních celých číslech* nebo také *Gaussovým prvočíslem*.

Protože se nadále budeme zabývat i běžnými prvočísly, upřesníme ještě trochu názvosloví. budeme-li mluvit o *běžném prvočísle*, máme tím na mysli prvočíslo v $\mathbb{Z}$ (tj. takové kladné číslo, které má právě dva kladné dělitele). V druhém případě prvočíslo v $\mathbb{Z}[i]$ budeme vždy nazývat *Gaussovo prvočíslo* nebo jen *prvočíslo*. Množinu všech běžných prvočísel budeme značit $\mathcal{P}$ a množinu všech Gaussových prvočísel $\mathcal{P}_\mathcal{G}$.

Některá Gaussova prvočísla: $1+i$, $1-i$, $-1-i$, $-1+i$, 3, $3i$, -3, $-3i$, $2+i$, $2-i$, ...

4.1. Vlastnosti Gaussových prvočísel

Pokud $p \nmid a$, pak $\mathcal{NSD}(a,p) \in \mathcal{U}$, protože kdyby to tak nebylo a $\mathcal{NSD}(a,p)$ bylo nějaké d pak platí $d \mid p$ tj. $d \in \{1, i, -1, -i, p, -p, ip, -ip\}$. A protože $p \nmid a$, pak $p \nmid d$ a dostáváme to, co jsme chtěli.

Věta 4.1.1 Číslo $p \in \mathbb{Z}[i]$ je Gaussovo prvočíslo právě tehdy, když $\forall a, b \in \mathbb{Z}[i] : p \mid ab \implies p \mid a \vee p \mid b$.

Důkaz: Nejdříve dokážeme implikaci zleva doprava:

Rozebereme dva případy: $p \mid a$ pak je implikace triviálně splněna. Pokud $p \nmid a$ pak $\mathcal{NSD}(p,a) \in \mathcal{U}$ a proto pro p, a a b platí věta 3.3.2 tj. $p \mid b$.

Nyní budeme předpokládat, že pro nějaké $p \in \mathbb{Z}[i]$ platí $\forall a, b \in \mathbb{Z}[i] : p \mid ab \implies p \mid a \vee p \mid b$. Důkaz povedeme sporem: předpokládejme, že existuje nějaké d tak, že d je vlastní dělitel čísla p. Proto existuje $c \in \mathbb{Z}[i]$ takové, že $c \cdot d = p$ a navíc $c, d \notin \mathcal{U}$, tak p nedělí ani c ani d, ale p dělí jejich součin a dostáváme spor.

Tím dostáváme ekvivalentní podmínku prvočíselnosti a také velmi důležitou vlastnost prvočísel.

Věta 4.1.2 (Věta o rozkladu čísla na prvočísla) Každé Gaussovo celé číslo různé od jednotky a od nuly lze napsat jako součin Gaussových prvočísel.

Důkaz: Větu budeme dokazovat indukcí vzhledem k druhé mocnině absolutní hodnoty. Mějme číslo a a $|a|$ nechť je jeho absolutní hodnota.

I. $|a|^2 = 2$ Tuto podmínku splňují čísla $1+i$, $1-i$ a jejich u-násobky. Tato čísla jsou prvočísla a proto je netřeba rozkládat.

II. Předpokládejme, že všechna čísla s druhou mocninou absolutní hodnoty menší než $|a|^2$ jdou rozložit na součin prvočísel. Číslo a buď je prvočíslem, pak je rozklad jasný, nebo není prvočíslem, pak existuje nějaký jeho vlastní dělitel d a podíl c tak, aby $cd = a$. Navíc $|c|$ i $|d|$ je menší než $|a|$ takže pro ně platí indukční předpoklad, a proto i číslo a umíme rozložit na součin prvočísel.

Věta 4.1.3 Existuje nekonečně mnoho Gaussových prvočísel.

Důkaz: Sporem. Předpokládejme, že existuje konečně mnoho Gaussových prvočísel. Označme je p_1, p_2, ..., p_k, kde $k \in \mathbb{N}$. Uvažujme číslo $a = p_1 p_2 \dots p_k + 1$. Toto číslo není dělitelné žádným prvočíslem, pokud by tomu bylo jinak, pak $\exists i \in 1, 2, \dots, k : p_i \mid a \implies p_i \mid a - p_1 p_2 \dots p_k$, dostáváme $p_i \mid 1$, což je spor. Ale podle předchozí věty číslo a lze rozložit na prvočinitele $\implies$ spor.

4.2. Tvar Gaussových prvočísel

Věta 4.2.1 Číslo $z \in \mathbb{Z}[i]$ je Gaussovým prvočíslem právě tehdy, když nabývá jednoho z těchto tvarů:

$$z = \begin{cases} a+ib & a^2+b^2 \text{ je běžné prvočíslo a } a,b \neq 0 \\ up & u \in \mathcal{U} \text{ a } p \text{ je běžné prvočíslo, které nelze zapsat jako součet dvou kvadrátů} \end{cases}$$

Důkaz: Rozdělíme si problém na dva případy: I. $z = a + ib \wedge a, b \neq 0$ a II. $z = ua, u \in \mathcal{U}$.

I. $z = a + bi$: Uvažme číslo $z\overline{z} \in \mathbb{Z}$ a jeho rozklad na běžná prvočísla. Pak z dělí jedno z těchto prvočísel. Nechť p je toto prvočíslo a $x = \frac{p}{z}, x = c + id$. Platí $p = xz = (ac - bd) + i(ad + bc)$ proto:

$$\begin{aligned} ad + bc &= 0 \\ ad &= -bc \\ \frac{a}{b} &= \frac{c}{-d} \end{aligned}$$

Poslední úpravu si můžeme dovolit, protože $a, b \neq 0 \wedge p \neq 0$ a proto i $c, d \neq 0$.

Zlomek $\frac{a}{b}$ je v základním tvaru, protože kdyby nebyl a existovalo by nějaké celé $k \mid a \wedge k \mid b$, ale takové k dělí i z, což je spor s prvočíselností čísla z. Proto platí: $\exists k \in \mathbb{Z} : c = ka \wedge -d = kb$.

$$\begin{aligned} zx &= p \\ a \cdot ka - b \cdot (-kb) &= p \\ k(a^2 + b^2) &= p \end{aligned}$$

A protože $a^2 + b^2 \geq 2$ ($z \in \mathcal{P}_\mathcal{G}$) pak $k = 1$ tj. $p = |z|^2$.

Ještě druhou implikaci: Mějme běžné prvočíslo $p = a^2 + b^2$. Pak $p = (a + ib)(a - ib)$. Uvažujme nějaké Gaussovo prvočíslo $z \mid a \pm ib$ pak i $z \mid p$ tj. $z = a \pm ib$. Proto čísla $a \pm ib$ jsou Gaussovská prvočísla.

II. Pokud $z = up$, pak mohu místo z uvažovat p, co se týče dělitelnosti. A protože neexistuje žádné číslo, které má nulovou reálnou nebo imaginární část a dělí číslo p (z důvodu, že p je obyčejné prvočíslo), jediné číslo, které by mohlo dělit p je Gaussovo prvočíslo předchozího tvaru, ale to by p muselo být součtem dvou kvadrátů – spor. Všechny úvahy se dají i obrátit, a proto je věta dokázána.

Věta 4.2.2 Každé běžné prvočíslo tvaru $4k + 1$ lze zapsat jako součet dvou kvadrátů.

Důkaz: Podle věty 1.3.4 platí, že každé takové prvočíslo dělí nějaké $n^2 + 1$. Uvažujme rozklad čísla $n^2 + 1 = (n + i)(n - i)$. Jak $n + i$ tak $n - i$ nemůže být dělitelné žádným Gaussovým prvočíslem tvaru up, kde p je běžné prvočíslo (které nelze zapsat jako součet dvou druhých mocnin) a $u \in \mathcal{U}$, protože pak by bylo dělitelné i prvočíslem p tedy $\frac{n \pm i}{p} \in \mathbb{Z}[i]$:

$$\frac{n \pm i}{p} = \frac{n}{p} \pm \frac{1}{p} i \in \mathbb{Z}[i] \implies \frac{1}{p} \in \mathbb{Z}$$

což je spor.

Čísla $n \pm i$ jsou tedy dělitelná pouze Gaussovými prvočísly z takovými, že $|z|^2$ je běžné prvočíslo. Takže v rozkladu čísla $n^2 + 1$ na Gaussovy prvočinitele se nachází jen tato prvočísla, navíc ke každému je tam i komplexně sdružené, protože pokud $z \mid (n \pm i)$ pak $\overline{z} \mid (n \mp i)$. Když vynásobíme dvě komplexně sdružená prvočísla, vyjde nám běžné prvočíslo, které lze zapsat jako součet dvou druhých mocnin. Tedy $n^2 + 1$ je dělitelné pouze prvočísly, které lze zapsat jako součet dvou druhých mocnin. Mějme prvočíslo tvaru $4k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$), pak dělí $n^2 + 1$ a lze ho tedy zapsat jako součin dvou druhých mocnin.

Lemma. Běžné prvočíslo lze zapsat jako součet dvou kvadrátů právě tehdy když není tvaru $4k + 3$.

Důkaz: Prvočísla tvaru $4k$ neexistují. Prvočísla tvaru $4k+1$ jdou zapsat jako součet dvou kvadrátů podle věty 4.2.2. Tvaru $4k + 2$ je pouze dvojka a $2 = 1^2 + 1^2$. A číslo tvaru $4k + 3$ nelze zapsat jako součet dvou kvadrátů, protože kvadratické zbytky modulo 4 jsou 0 a 1. A žádným součtem dvou z těchto čísel nedostaneme 3.

Větu 4.2.1 lze tedy ekvivalentně formulovat takto:

Číslo $z \in \mathbb{Z}[i]$ je Gaussovým prvočíslem právě tehdy, když je jednoho z těchto tvarů:

$$z = \begin{cases} a+ib & a^2+b^2 = p, \text{ kde } p \text{ je běžné prvočíslo tvaru } 4k+1, \text{ nebo } 2 \\ up & u \in \mathcal{U} \text{ a } p \text{ je běžné prvočíslo tvaru } 4k+3 \end{cases}$$

4.3. Využití Gaussových prvočísel

Gaussova prvočísla mají mnohé využtí v běžné teorii čísel, pro ukázku zde uvádíme větu:

Věta 4.3.1 Celé číslo a, které lze zapsat jako součin dvou čísel b, c takových, že je lze zapsat jako součet dvou kvadrátů, lze zapsat jako součet dvou kvadrátů.

Důkaz: Nechť $b = b_1^2 + b_2^2$ a $c = c_1^2 + c_2^2$. Pak platí:

$$\begin{aligned} a = b \cdot c = (b_1^2+b_2^2)(c_1^2+c_2^2) = (b_1+ib_2)(b_1-ib_2)(c_1+ic_2)(c_1-ic_2) = \\ = \big((b_1+ib_2)(c_1+ic_2)\big)\big((b_1-ib_2)(c_1-ic_2)\big) \end{aligned}$$

Což je součin dvou komplexně sdružených čísel $z = x+iy$ a $\overline{z} = x-iy$: $a = z\overline{z} = x^2+y^2$.

A jeden příklad:

Příklad: (Matematická olympiáda 55. roč. A-I-6)
Najděte všechny uspořádané dvojice (x, y) přirozených čísel, pro něž platí

$$x^2 + y^2 = 2005(x-y).$$

Řešení: Nejdříve si zadanou rovnici upravíme a vynásobíme čtyřmi.

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{2005}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{2005}{2}\right)^2 = 2 \cdot \frac{2005^2}{4} \\ (2x-2005)^2 + (2y+2005)^2 = 2 \cdot 2005^2 \end{aligned}$$

Rozložíme si číslo $2 \cdot 2005^2$ na Gaussova prvočísla:

$$2 \cdot 2005^2 = (1+i)(1-i)(2+i)^2(2-i)^2(20+i)^2(20-i)^2$$

Snažíme se vyjádřit číslo $2 \cdot 2005^2$ jako součet dvou kvadrátů, neboli jako součin dvou komplexně sdružených Gaussových čísel. Aby nějaká dvě čísla byla komplexně sdružená musí se v jejich rozkladu na prvočísla nacházet komplexně sdružená čísla. Proto rozdělíme prvočinitele čísla $2 \cdot 2005^2$ do komplexně sdružených dvojic a z každé vybereme jedno číslo. Vybraná čísla pak vynásobíme a dostaneme takové číslo $a+ib$, že $a^2+b^2 = 2 \cdot 2005^2$. Tzn. nemusíme ani počítat druhý součin, ba co víc, všechna čísla tvaru $u \cdot (a+ib)$, kde $u \in \mathcal{U}$, nám dají stejné dvojice druhých mocnin. Proto si můžeme počítání velmi urychlit.

Uvědomíme si, že $1+i = i \cdot (1-i)$ takže výběr v dvojici $1+i, 1-i$ nebude mít na výsledek efekt. Dále si můžeme ještě jedno číslo zvolit za konstantní, protože jinak bychom ke všem součinům dostali i komplexně sdružená čísla.

Bude nám stačit spočítat „jen“ šest součinů:

$$\begin{aligned} (1+i)(2+i)(2+i)(20+i)(20+i) &= -679+2753i \\ (1+i)(2+i)(2-i)(20+i)(20+i) &= 1795+2195i \\ (1+i)(2+i)(2+i)(20+i)(20-i) &= -401+2807i \\ (1+i)(2+i)(2-i)(20+i)(20-i) &= 2005+2005i \\ (1+i)(2+i)(2+i)(20-i)(20-i) &= -119+2833i \\ (1+i)(2+i)(2-i)(20-i)(20-i) &= 2195+1795i \end{aligned}$$

Všechny neuspořádané dvojice přirozených čísel (a, b) takových, že $a^2 + b^2 = 2 \cdot 2005^2$ jsou tedy: $(119, 2833)$, $(401, 2807)$, $(679, 2753)$, $(1795, 2195)$, $(2005, 2005)$ Na dvojici $(2005, 2005)$ můžeme s klidem v duši zapomenout, protože víme, že y je přirozené tedy $2005 + 2y \geq 2007$. Tato nerovnost nám také říká, které číslo z dvojice přiřadíme k $2005 + 2y$ a které k $2005 - 2x$. Dále nesmíme zapomenout, že číslo $2005 - 2x$ může být i záporné a pak nám zbude jen dopočítat řešení.

Úloha má celkem osm řešení: $(x, y) \in \big\{(1062, 414), (943, 414), (105, 95), (1900, 95), (663, 374), (1342, 374), (802, 401), (1203, 401)\big\}$

Použitá literatura

[1] Prof. RNDr. Miloš Ráb, DrSc.: *Komplexní čísla v elementární matematice*, Masarykova univerzita, Brno, 1997; ISBN 80-210-1475-X

[2] RNDr. Jiří Herman, Ph.D., Doc. RNDr. Radan Kučera, CSc., Doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.: *Metody řešení matematických úloh I*, Masarykova univerzita, Brno, 2001; ISBN 80-210-1202-1

[3] Eric W. Weisstein: *Gaussian Prime*, From MathWorld – A Wolfram Web Resource http://mathworld.wolfram.com/GaussianPrime.html

[4] Eric W. Weisstein: *Gaussian Integer*, From MathWorld – A Wolfram Web Resource http://mathworld.wolfram.com/GaussianInteger.html

[5] Martin Klazar: *Introduction in Number Theory*, http://www.ms.mff.cuni.cz/acad/kam/klazar/utc04.ps

[6] 55. ročník Matematické olympiády: *Úlohy domácí části I. kola kategorie A*, http://www.math.muni.cz/~rvmo/mo/55/a55i.pdf