

Středoškolská odborná činnost 2005/2006

Obor 1 – Matematika a matematická informatika

**ZOBECNĚNÍ METOD DLÁŽDĚNÍ
PRO TROJÚHELNÍKOVOU
A ŠESTIÚHELNÍKOVOU SÍŤ**

Autorka:

Eva Černohorská

První české gymnázium v Karlových Varech

Národní 25, 360 20 Karlovy Vary

4. ročník

Konzultant práce:

Doc. Mgr. Miroslav Kureš, Dr.

VUT Brno

Zadavatel práce:

Doc. Mgr. Miroslav Kureš, Dr.

VUT Brno

Karlovy Vary, 2006

Karlovarský kraj

Prohlášení

Prohlašuji tímto, že jsem práci vypracovala samostatně pod vedením Doc. Mgr. Miroslava Kureše, Dr. a uvedla jsem v seznamu literatury veškerou použitou literaturu a další informační zdroje včetně internetu.

V Karlových Varech dne 4.4.2006

Eva Černohorská

Poděkování

Děkuji svému konzultantovi, panu Doc. Mgr. Miroslavu Kurešovi, Dr., za cenné rady a připomínky, dále děkuji PaedDr. Janě Černožské za stylistickou a pravopisnou kontrolu. Také bych chtěla poděkovat RNDr. Zdeňku Papežovi, PaedDr. Vratislavu Emlerovi a Mgr. Miroslavě Šolcové za pomoc s formální stránkou práce.

Resumé

Práce se zabývá zobecněním metod dláždění do trojúhelníkové a šestiúhelníkové sítě. Zobecňuje také diamanty, polyomina a polyplety do těchto sítí. Hlavní zobecněnou metodou je metoda založená na paralele dvou měst, jejímž autorem je James Propp. V rámci jejího zobecnění jsem popsala všechny dlaždice s nulovým orientovaným obsahem v druhém městě (stěžejní dlaždice), kterých je — narozdíl od čtvercové sítě — více než jedna. Použití metod je demonstrováno na příkladech.

Summary

This work deals with the generalisation of methods of setting tiles to triangular and hexagonal grid. It generalizes diamonds, polyominoes and polyplets to these grids as well. The main generalized method by James Propp is based on the parallel of two towns. In the framework of its generalization, I described all the tiles with zero oriented area in the second town (principal tiles), and their count is — in comparison with square grid — higher than one. Applications of these methods are demonstrated by some examples.

Klíčová slova

dláždění
trojúhelníková síť
šestiúhelníková síť
metoda dvou měst
diamant
polyomino
polyplet

Obsah

1. Úvod	5
1.1. Trocha historie	5
2. Definice	6
2.1. Diamanty	6
2.1.1. Čtvercové diamanty	6
2.1.2. Zobecnění	7
2.1.3. Trojúhelníkové diamanty	9
2.1.4. Šestiúhelníkové diamanty	10
2.2. Definice	11
2.2.1. Domino	11
2.2.2. Triomino	11
2.2.3. Tetromino	11
2.2.4. Polyomino	12
2.2.5. Polyiamond	12
2.2.6. Polyhex	12
2.2.7. Počet závitů	12
2.2.8. Orientovaný obsah	13
3. Metody	14
3.1. Metoda lokálního uspořádání	14
3.2. Metoda obarvování	14
3.3. Metoda dvou měst	15
3.4. Zobecnění	19
3.4.1. Trojúhelníková síť	19
3.4.2. Šestiúhelníková síť	24
3.4.3. Polyplety	25
4. Použití	27
5. Závěr	32
5.1. Shrnutí	32
5.2. Použití	32
5.3. Možné problémy	32
6. Literatura	33
7. Přílohy	34

1. Úvod

Člověk neznalý problematiky si se slovem dláždění spojí nejspíš dlážděný chodník, silnici nebo dlaždičky v koupelně. Když ho vyzvete, ať se zamyslí nad tím, co je s dlážděním spojeno, napadne ho práce dělníků, továrna, kde se dlaždice vyrábí, atd. Asi ho již nenapadne zamyslet se nad tím, proč jsou dlaždice čtvercovité, šestiúhelníkové, nebo se dokonce na chodníku nachází dva různé typy dlaždiček. Takový člověk zřejmě nepoloží otázky: „A uměli by to ti dělníci, i kdyby byl ten chodník nekonečný?“ a „Opravdu tu ta díra zaplněná částí dlaždice musela být? Nešlo by to i bez ní?“, nebo dokonce „A nemohlo by být dláždění užitečné i jinde?“

Asi nejsem „úplně obyčejný“ člověk, dost možná i proto, že mým koníčkem je matematika. Každopádně jsem si tyto a další otázky položila a začala se dlážděním více zabývat. A tak vznikla tato práce.

Tato práce nekokáže pokrýt celou dnešní rozsáhlou teorii dláždění a pokrývání roviny a není to ani jejím záměrem. Tato práce má zájemcům ukázat několik metod dláždění (zejména metodu Jamese Proppa založenou na paralele dvou měst), různé problémy spojené s dlážděním diamantů a jim podobných útvarů. Má taktéž ukázat, že nejen čtvercová síť je zajímavá a že spousta problémů existuje i v trojúhelníkové a šestiúhelníkové síti, proto jsem zobecnila Proppovu metodu pro jiné sítě a pokusila jsem se také o zobecnění diamantů, polyomin a polypletů.

1.1. Trocha historie

Lidé si odpradáva zdobili své nádoby a látky spoustou ornamentů, zdobí si je dodnes. Existuje spousta knížek, kde jsou vzory nakresleny, kde je popsán technologický postup, ale velmi dlouho neexistovala žádná kniha, která by se jimi zabývala z hlediska matematického.

První, koho napadlo (docela nedávno) položit si výše uvedené a podobné otázky, byl Branko Grünbaum spolu s G. C. Sheephardem. V roce 1987 vydali knihu „Tilings and Pattern“, v níž vypracovali a sjednotili základy teorie dláždění, které obsahovaly již teorii grup, kombinatoriku, geometrii a topologii. Jejich práce byla úspěšná i v jiných oborech - např. krystalografii, inženýrství, ale i umění nebo antropologii.

V dnešní době teorii dláždění podporují např. John Horton Conway (hra Life), William Paul Thurston, Roger Penrose (autor aperiodického dláždění pokrývajícího rovinu) a další. Popularitu dláždění získal také Maurits Cornelis Escher se svými matematicky inspirovanými uměleckými obrázky.

Nyní, v době počítačů, dostala tato teorie další možnosti, jako je vizualizace, interaktivní dláždění a další.

2. Definice

2.1. Diamanty

2.1.1. Čtvercové diamanty

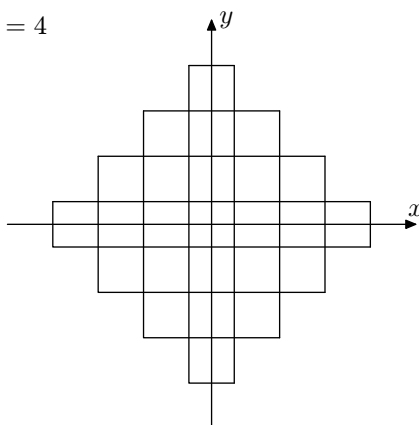
Pod slovem diamant si asi představíte průsvitný drahokam. Prosím, odpoutejte se od této představy, protože jsme v matematice.

Pod názvem diamant typu n teď budeme chápat útvar, který se skládá z jednotkových čtverců, jejichž středy mají celočíselné souřadnice a splňují v kartézské soustavě nerovnost:

$$|x| + |y| \leq n \quad x, y \in \mathbb{Z}; \quad n \in \mathbb{N}$$

Ten vypadá asi následovně:

např. $n = 4$



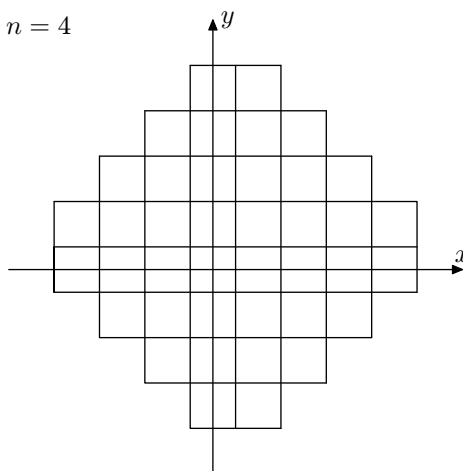
obr. 1

Zde se nabízí i definice jiná: *Diamant typu n* je oblast skládající se z $2n(n+1) + 1$ jednotkových nepřekrývajících se čtverců uspořádaných do centrovaných řad délek $1, 3, 5, 7, \dots, (2n-1), (2n+1), (2n-1), \dots, 7, 5, 3, 1$.

Velmi příbuzný diamantu je Aztécký diamant, který se skládá z jednotkových čtverců, jejichž vrcholy mají v kartézské soustavě souřadnic celočíselné souřadnice a jejichž středy splňují nerovnost:

$$\left| x - \frac{1}{2} \right| + \left| y - \frac{1}{2} \right| \leq n \quad x, y \in \mathbb{R}; \quad n \in \mathbb{N}$$

např. $n = 4$

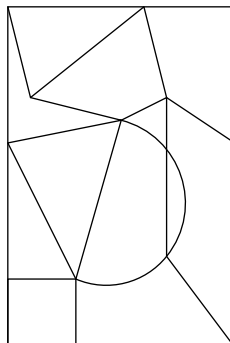


obr. 2

I tady se nabízí druhá definice: *Aztécký diamant typu n* je oblast skládající se z $2n(n+1)$ jednotkových nepřekrývajících se čtverců uspořádaných do centrovaných řad délek $2, 4, 6, 8, \dots, (2n-2), 2n, (2n-2), \dots, 8, 6, 4, 2$.

2.1.2. Zobecnění

Nejprve si definujeme pokrytí roviny: *Pokrytí roviny* je soubor spočetně mnoha uzavřených množin s disjunktními vnitřky, zvaných dlaždice, které vyplní celou rovinu.

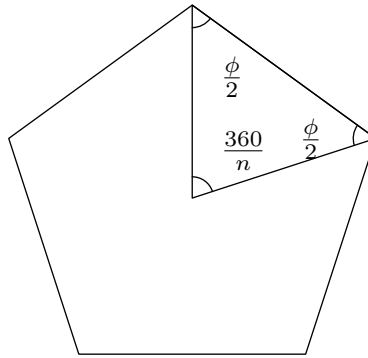


obr. 3

Zamysleme se nyní nad tím, jak by mohl vypadat takový obecný diamant. Bude rozumné uvažovat pouze diamanty složené z dlaždic – pravidelných n -úhelníků, které pokryjí rovinu, protože jednou ze základních vlastností, kterou po diamantu chceme, je, aby diamant vyššího typu měl podobný tvar, vlastnosti, atd.

Tvrzení. *Pravidelné n -úhelníky, které pokryjí rovinu, jsou pouze rovnostranný trojúhelník, čtverec a šestiúhelník.*

Důkaz: Pravidelné n -úhelníky mají vnitřní úhel $\phi = 180 - \frac{360}{n}$, protože z trojúhelníku plyne $\frac{\phi}{2} + \frac{\phi}{2} + \frac{360}{n} = 180$ (viz obr. 4).



obr. 4

Pokud má tedy pravidelný \$n\$-úhelník pokrýt rovinu, pak nesmí u žádného jeho vrcholu vzniknout díra, neboli v každém vrcholu se setkává právě \$k\$ \$n\$-úhelníků, proto musí platit

$$k\left(180 - \frac{360}{n}\right) = 360$$

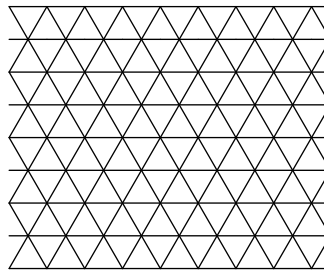
$$180kn - 360k - 360n = 0$$

$$n = \frac{2k}{k-2} = 2 + \frac{4}{k-2}$$

Z výše uvedeného vyplývá, že aby \$n\$ bylo celé číslo, musí platit: \$k - 2 \le 4\$ a zároveň \$k\$ vyjadřující počet \$n\$-úhelníků musí být přirozeným číslem. Případají v úvahu čísla: \$k = 1, 2, 3, 4, 5, 6\$, z nichž pouze pro \$k = 3\$ (\$n = 6\$), \$k = 4\$ (\$n = 4\$), \$k = 6\$ (\$n = 3\$) jsou hodnoty \$n\$ přirozené a odpovídají pravidelnému trojúhelníku, čtyřúhelníku a šestiúhelníku. \$\square\$

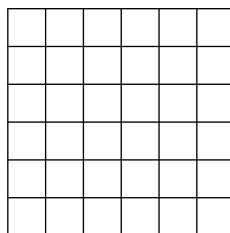
Protože tyto pravidelné \$n\$-úhelníky pokryjí rovinu, můžeme definovat tyto pojmy:

Trojúhelníková síť je pokrytí roviny rovnostrannými trojúhelníky o jednotkové straně. Vrcholy těchto trojúhelníků nazveme uzlové body (část je nakreslena na obr. 5).



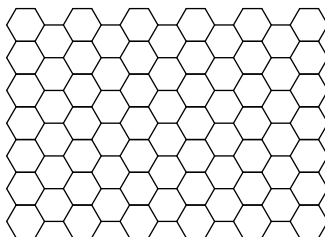
obr. 5

Čtvercová síť je pokrytí roviny čtverci o jednotkové straně. Vrcholy těchto čtverců nazveme uzlové body (část je nakreslena na obr. 6).



obr. 6

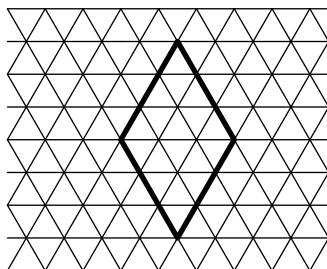
Šestiúhelníková síť je pokrytí roviny pravidelnými šestiúhelníky o jednotkové straně. Vrcholy těchto šestiúhelníků nazveme uzlové body (část je nakreslena na obr. 7).



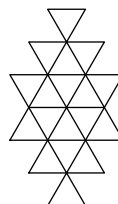
obr. 7

2.1.3. Trojúhelníkové diamanty

Výše definované diamanty mají tu vlastnost, že celé leží v nějakém čtverci s vrcholy na souřadnicových osách. To je důvod, který mě vedl k tomu, že budu definovat i ostatní diamanty tak, že se skládají z uzlových bodů, které leží v kosočtverci. Diamant měl úhel u vrcholu na ose x 90° , stejně jako je vnitřní úhel ve čtverci. Proto budu trojúhelníkovým diamantem nazývat útvar, jehož vrcholy leží v kosočtverci s ostrým úhlem 60° u vrcholu na ose x , stejně jako rovnostranný trojúhelník.



obr. 8

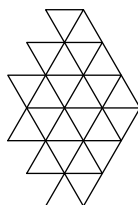


obr. 9

Jak je vidět na druhém obrázku, dají se i trojúhelníky obrátit. I pak jsou počty trojúhelníků v jednotlivých řadách stejné.

Nabízí se i tato definice: *Trojúhelníkový diamant typu n* je oblast skládající se z $2n^2$ nepřekrývajících se trojúhelníků o straně 1 uspořádaných do centrovaných řad délek $1, 3, 5, 7, \dots, (2n - 3), (2n - 1), (2n - 3), \dots, 7, 5, 3, 1$.

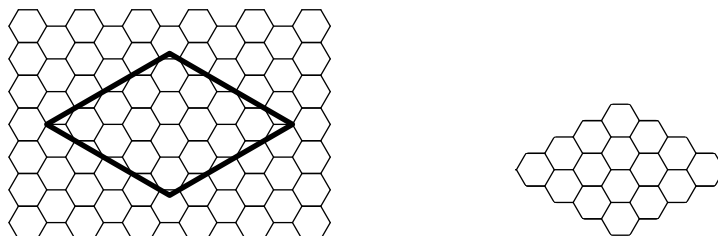
A podobně *trojúhelníkový aztécký diamant typu n* je oblast skládající se z $2n(n + 1)$ nepřekrývajících se trojúhelníků o straně 1 uspořádaných do centrovaných řad délek $2, 4, 6, 8, \dots, (2n - 2), 2n, (2n - 2), \dots, 8, 6, 4, 2$.



obr. 10

2.1.4. Šestiúhelníkové diamanty

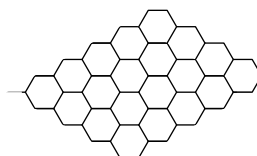
A nakonec šestiúhelníkový diamant by mohl vypadat asi takto: Útvar tvořený všemi uzly šestiúhelníkové sítě, které se vejdu do kosočtverce s úhlem u vrcholu ležícího na ose x 120° , stejně jako má šestiúhelník. Příklad je na obrázku.



obr. 11

I tento diamant by se dal definovat počtem dlaždic: *Šestiúhelníkový diamant typu n* je oblast skládající se z n^2 nepřekrývajících se šestiúhelníků o straně 1 uspořádaných do centrovaných řad délek $1, 2, 3, 4, \dots, (n - 1), n, (n - 1), \dots, 4, 3, 2, 1$.

A *aztécký šestiúhelníkový diamant typu n* je oblast skládající se z $n(n + 1)$ jednotkových nepřekrývajících se čtverců uspořádaných do centrovaných řad délek $2, 4, 6, 8, \dots, (2n - 2), 2n, 2n, (2n - 2), \dots, 8, 6, 4, 2$.



obr. 12

2.2. Definice

V této kapitole uvedu definice všech pojmů, které v textu použiji, které nejsou obecně známé a jejichž definice se nedají nalézt ve většině středoškolských učebnic. Doporučuji se vracet k této kapitole průběžně.

2.2.1. Domino

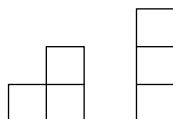
Definice: *Domino* je oblast složená ze dvou sousedních jednotkových čtverců.



obr. 13

2.2.2. Triomino

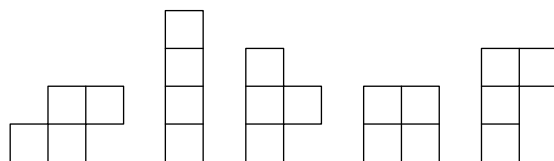
Definice: *Triomino* je oblast složená ze tří jednotkových čtverců tak, že každý čtverec má společnou hranu s aspoň jedním dalším.



obr. 14

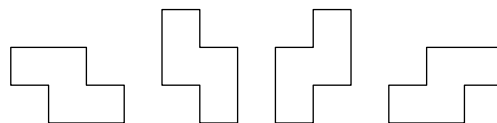
2.2.3. Tetromino

Definice: *Tetromino* je oblast složená ze čtyř jednotkových čtverců tak, že každý čtverec má společnou hranu s aspoň jedním dalším.



obr. 15

První tetromino zleva na obrázku 15 se nazývá liché a je zajímavé tím, že se dá otočit do zrcadlové polohy (viz obr. 16). Čtvrté tetromino zleva na obrázku 15 se nazývá čtvercové tetromino.



obr. 16

2.2.4. Polyomino

Definice: *Polyomino* je oblast složená z n jednotkových čtverců tak, že každý čtverec hranou sousedí s aspoň jedním dalším.

Pro $n = 2$ máme výše zmíněné domino, pro $n = 3$ triomino, pro $n = 4$ tetromino, pro $n = 5$ pentomino, pro $n = 6$ hexomino, atd.

2.2.5. Polyiamond

Definice: *Polyiamond* je oblast složená z n jednotkových trojúhelníků tak, že každý trojúhelník sousedí s aspoň jedním dalším hranou.

Na obrázku je diamond, triamond a tři tetriamondy.

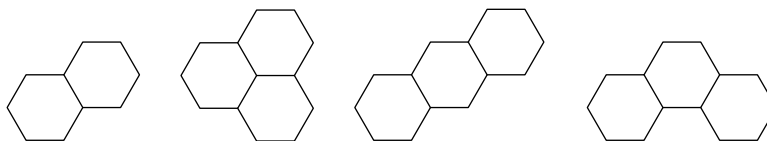


obr. 17

2.2.6. Polyhex

Definice: *Polyhex* je oblast složená z n jednotkových šestiúhelníků tak, že každý šestiúhelník sousedí s aspoň jedním dalším hranou.

Na obrázku je dihex a 3 trihexy. Tetrahexů je už 7.

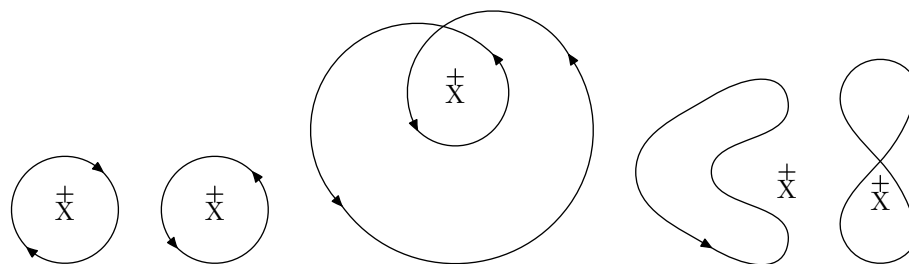


obr. 18

2.2.7. Počet závitů

Definice: *Počet závitů konečné uzavřené křivky okolo bodu X* , který na ní neleží, je počet průtnutí s rovnoběžkami s osami procházejícími bodem X v kladném smyslu (proti směru hodinových ručiček) minus počet průtnutí s rovnoběžkami s osami procházejícími bodem X v záporném smyslu (po směru hodinových ručiček).

Počet závitů buňky se definuje, pokud je počet závitů všech bodů uvnitř buňky stejný jako počet závitů libovoněho bodu uvnitř buňky. (Tato situace nastává například vždy, když křivka vede pouze po čtvercové, resp. trojúhelníkové, šestiúhelníkové síti.) (viz obr. 19)



obr. 19

2.2.8. Orientovaný obsah

Definice: *Orientovaný obsah uzavřené křivkou* je součet počtu závitů okolo všech buněk. (Spočetně mnoho buněk má počet závitů 0).

Orientovaný obsah útvaru U je orientovaný obsah uzavřený jeho hranicí.

$$S_1 = -1$$



obr. 20

$$S_2 = +1$$



3. Metody

Teorie dláždění může a nemusí být náročná na matematický aparát. Základní úlohou je totiž úloha typu: „Lze útvar U_1 vydláždít útvarem U_2 ?“ Pokud tato úloha má řešení, můžeme ji řešit metodou „pokus-omyl“, neboli zkoušet různé možnosti a dříve či později k řešení dospět víceméně náhodou. Pak se zpravidla stává, že naši několikahodinovou práci, kterou jste popsali spoustu papírů, vyjádří jeden obrázek. Problém však nastává, když úloha řešení nemá. V tom případě je daleko složitější ji uspokojivě vyřešit. Samozřejmě se dá též užít metoda „pokus-omyl“, neboli prozkoumat všechny možnosti, ale tato metoda je neelegantní a většinou dosti zdlouhavá. Přesto je v době rychlých počítačů užívaná. Já bych v této kapitole chtěla poodkrýt jiné metody, které vedou k zajímavějším řešením.

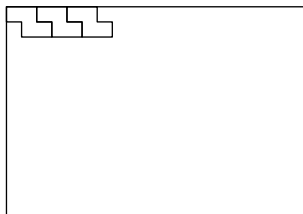
3.1. Metoda lokálního uspořádání

O této metodě, stejně jako o metodě následující, jsou první zmínky v knize B. Grünbauma a G. C. Sheepharda „Tilings and Patterns“. Můžeme však odhadovat, že tyto metody nevymysleli a těmito argumenty zdůvodňovali nepokrytelnost i jejich dávní předci.

Metoda je, jako většina metod, založená na sporu. V této metodě předpokládáme, že dláždění existuje v celém útvaru U_1 , a tedy i v určitém místě. To místo lze pokrýt pouze několika málo způsoby pomocí zadaných dlaždic. Všechny tyto způsoby vedou ke zjištění, že toto lokální dláždění nemůže existovat globálně.

Příklad: Můžeme pravoúhelník pokrýt pouze lichými tetrominy?

Řešení: Pokud by toto pokrytí existovalo, muselo by pokrývat i rohy pravoúhelníku. To lze jenom jedním způsobem. Na položené tetromino lze dále navázat opět jedním způsobem. Atd. (viz obr. 21) Takto dospějeme až k druhému rohu, který již nepokryjeme. Toto lokální dláždění tedy nemůže existovat globálně, a proto pravoúhelník pouze pomocí lichých tetromin nepokryjeme.



obr. 21

3.2. Metoda obarvování

Jak už sám název říká, tato metoda spočívá v obarvení pokrývaného útvaru (např. jako šachovnici) a tím dospějeme ke sporu, protože se nám tam dlaždice „nevejde“ tolikrát, kolikrát by měla.

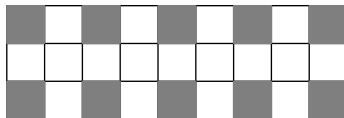
Příklad: Můžeme obdélník 3×9 pokrýt pouze triominy typu L (viz obr. 22)?



obr. 22

Řešení: Obdélník obarvíme podle obrázku 23. Nyní si uvědomíme, že triomino může v ná-

sledujícím obarvení zaujmout maximálně jeden černý čtverec. Proto by musely černé čtverce zaujímat maximálně $\frac{1}{3}$ plochy obdélníku, tj. maximálně 9 čtverců, ale zabírají 10 čtverců. Z toho vyplývá, že obdélník triominy pokrýt nelze.

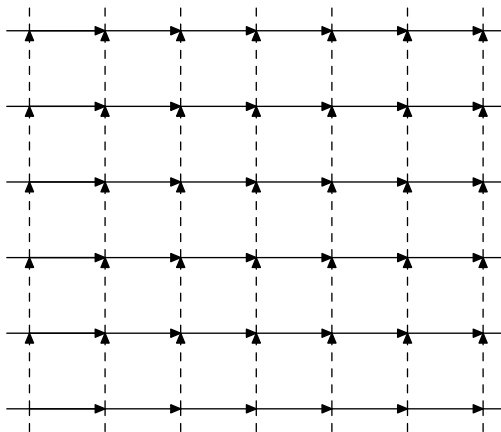


obr. 23

3.3. Metoda dvou měst

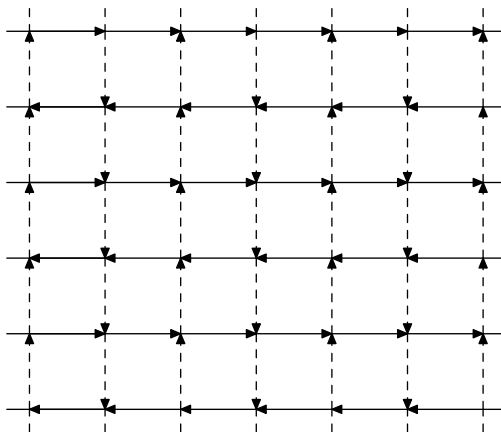
Tuto metodu publikovat ve svém článku [2] James Propp v roce 1997.

Metoda spočívá v tom, že máme čtvercovou síť (plán města), kde jsou rovnoběžky s osami procházející uzly orientovány (jezdí tam doprava). V prvním městě jsou všechny rovnoběžky s osou x orientovány doprava a všechny rovnoběžky s osou y orientovány nahoru (viz obr. 24).



obr. 24

V druhém městě je vždy jedna rovnoběžka s osou x orientována doprava a sousední doleva, další opět doprava atd. a rovnoběžka s osou y je orientována nahoru a sousední potom dolů, další opět nahoru, další dolů, atd. (viz obr. 25)

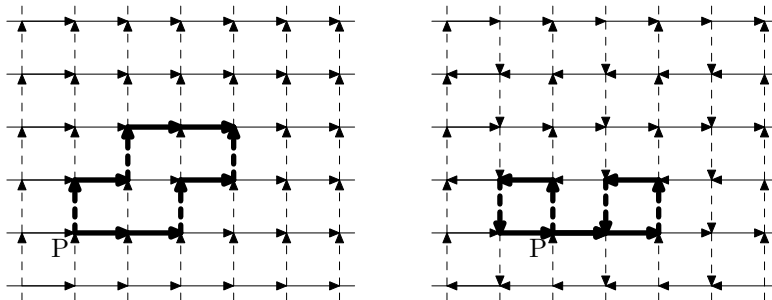


obr. 25

V prvním městě obejdeme hranici útvaru U_1 a v druhém městě se řídíme stejnými pokyny jako v prvním městě, ale ne pokyny typu vpravo, vlevo, ani na sever, na jih. Nové pokyny

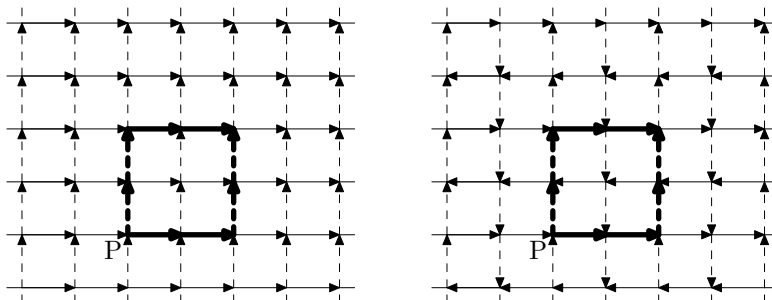
zní: po rovnoběžce s osou x (resp. y) po směru (resp. proti směru). Naše cesta v druhém městě může, a nemusí tvořit uzavřenou křivku, ohraničující útvar V_1 , který s útvarom U_1 velmi úzce souvisí a může nám dokázat i vyvrátit nějaké myšlenky.

Například pokud v prvním městě obejdeme liché tetromino, pak v druhém městě půjdeme po uzavřené křivce (viz obr. 26) popsané takto: $x^+; x^+; y^+; x^+; y^+; x^-; x^-; y^-; x^-; y^-$, kde x (resp. y) značí rovnoběžku s osou x (resp. y) a $+$ (resp. $-$) určuje, že cesta vede po (resp. proti) vyznačenému směru.



obr. 26

Nebo pokud obejdeme čtvercové tetromino, pak v druhém městě také půjdeme po hranici čtvercového tetromina: $x^+; x^+; y^+; y^+; x^-; x^-; y^-; y^-$ (viz obr. 27).



obr. 27

Tato pozorování nás mohou vést k formulaci několika tvrzení:

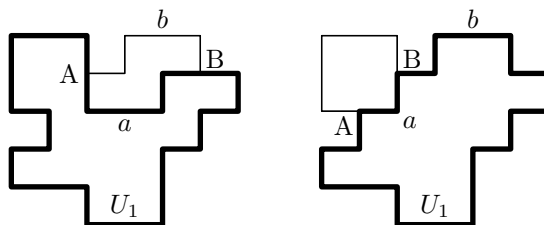
Tvrzení 1. Pokud obejdeme v prvním městě po hranici útvaru, který lze vydláždit lichými tetrominy a čtvercovými tetrominy, pak obejdeme v druhém městě uzavřenou křivku.

Důkaz: Provedeme úplnou indukci. Nejdříve si uvědomme, že v druhém městě existují 4 různé křižovatky, na kterých můžeme začít. Ovšem dvě a dvě jsou vždy ekvivalentní – stačí uvažovat, bez újmy na obecnosti, křižovatky, kde doprava vede směrem doprava a nahoru, a tu, kde doprava vede doleva a nahoru; další dvě by byly jenom osově souměrné podle rovnoběžky s osou x .

liché tetromino – Pro liché tetromino věta platí. Je třeba vyzkoušet, pro libovolné otočení, že můžeme začít z libovolného uzlu, který leží na hranici lichého tetromina a že pro každý uzel můžeme začít na libovolné ze dvou křižovatek.

čtvercové tetromino – Pro čtvercové tetromino věta též platí. Opět musíme vyzkoušet, že můžeme začít z libovolného uzlu na obvodu a na libovolné ze dvou křižovatek.

indukční krok – Předpokládejme, že máme daný nejmenší útvar U , který lze vydláždit lichými a čtvercovými tetrominy v prvním městě, ale v druhém městě netvoří uzavřenou křivku. Vybereme si jednu krajní dlaždici a útvar U o ní zmenšíme, tak vznikne útvar U_1 , který už tvoří uzavřenou křivku v druhém městě. Obejdeme nyní útvar U_1 od bodu A do bodu A po cestě a (viz obr. 28), v druhém městě tak obejdeme uzavřenou křivku. Pak se vrátíme z bodu A do bodu B opět po cestě a a budeme pokračovat z B do A po cestě b . Tím jsme vlastně obešli odebranou dlaždici, takže se opět vrátíme do počátečního bodu i v druhém městě. A protože ujdeme cestu z B do A po trase a následně tam i zpět, tak tyto dvě cesty můžeme vypustit a útvar U nám vytvoří v druhém městě též uzavřenou křivku, což je spor s předpokladem a tvrzení je dokázáno. \square



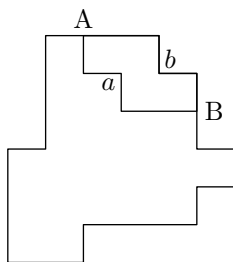
obr. 28

Tvrzení 2. Pokud obejdeme v prvním městě hranici útvaru, který lze vydláždit lichými tetrominy, pak obejdeme v druhém městě uzavřenou křivku s orientovaným obsahem 0.

Důkaz: Opět provedeme úplnou indukci.

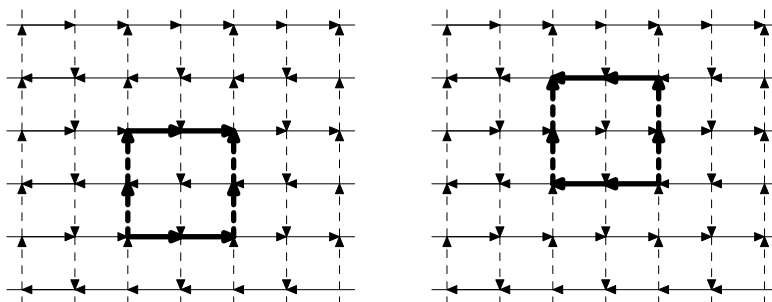
liché tetromino – Pro liché tetromino věta platí. Je třeba vyzkoušet pro libovolné otočení, že můžeme začít z libovolného uzlu a na libovolné ze dvou křižovatek. Ve všech případech je obrázek podobný obr.22, kdy jeden čtverec obejdeme proti směru a druhý po směru hodinových ručiček. Celkový orientovaný obsah je tedy 0.

indukční krok – Pro spor předpokládejme, že máme daný nejmenší útvar U , který lze pokrýt pouze lichými tetrominy v prvním městě, a přesto v druhém městě má nenulový orientovaný obsah. Opět si pomůžeme tím, že ho zmenšíme o jednu dlaždici. Pak každý zvlášť mají v druhém městě orientovaný obsah nulový. Opět obejdeme menší útvar z bodu A do bodu A cestou a (viz obr. 29), pak se vrátíme z A do B cestou a a potom jdeme z bodu B do bodu A cestou b . Tím jsme obešli dlaždici. A protože cesta z B do A po a byla následována cestou zpět, tak se počet závitů žádné buňky nezměnil, tedy ani orientovaný obsah. Útvar U má v druhém městě orientovaný obsah 0, což je spor s předpokladem a tvrzení platí. \square



obr. 29

Pokud obejdeme v prvním městě čtvercové tetromino, pak v druhém městě obejdeme uzavřenou křivku s orientovaným obsahem $+4$ resp. -4 podle toho, na jaké křižovatce začínáme (viz obr. 30). Kladný obsah má čtverec s vrcholy v křižovatkách se směrem nahoru a doprava a dolů doleva, záporný obsah mají čtverce s vrcholy v ostatních křižovatkách.



obr. 30

Dále si můžeme všimnout, že křižovatky, kde mají čtvercová tetromina kladný obsah, jsou od sebe (stejně jako křižovatky, kde mají čtvercová tetromina záporný obsah) vzdálena o sudý počet jednotek (např. o 3 ve směru osy x a o 7 ve směru osy y). Znamená to, že pokud posuneme libovolný útvar o sudý počet jednotek, jeho orientovaný obsah se nezmění. Pokud posuneme útvar o liché počet jednotek, tak se jeho počáteční bod dostane na křižovatku jiného typu a jeho orientovanému obsahu se znaménko změní.

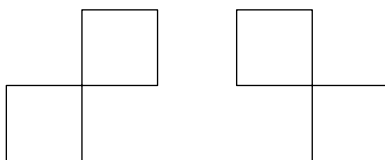
Věta 1 (Propp). *Pokud obejdeme v prvním městě po hranici útvaru U , který lze vydláždit lichými tetrominy a čtvercovými tetrominy, pak obejdeme v druhém městě uzavřenou křivku, která má invariantní orientovaný obsah vzhledem ke konkrétnímu dláždění útvaru U .*

Důkaz: Je vlastně velmi podobný důkazu předchozího tvrzení. Čtvercové tetromino může mít orientovaný obsah $+4$ nebo -4 a liché tetromino má orientovaný obsah 0 . Z aditivity orientovaného obsahu ve druhém městě a předchozího tvrzení je vše jasné. \square

Důsledek. *Pokud má útvar uzavřený křivkou v druhém městě nenulový obsah, není možno ho vydláždit pouze lichými tetrominy.*

Jistě nás hned napadne, když jsou tato dvě tetromina „jediná zajímavá“ (ve druhém městě tvoří uzavřenou křivku), proč zrovna tato? A jak by to asi bylo s ostatními polyominy? Monomino, domino ani žádné triomino uzavřenou křivku v druhém městě netvoří, tetromino pouze dvě (liché a čtvercové), pentomino také žádné, ani hexomino a heptomino, až některá oktomina opět ano. Další na řadě jsou zase až dodekamina ($n = 12$).

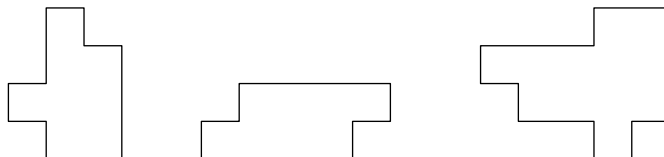
Pokud se podíváme pozorněji, tak základní dlaždice, tedy nejmenší, která tvoří v druhém městě uzavřenou křivku, se skládá ze dvou čtverců spojených vrcholem (viz obr. 31).



obr. 31

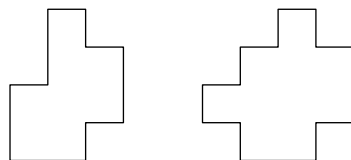
Tyto dvě výše uvedené dlaždice mají stejně orientovaný obsah, splývá-li bod dotyku čtverců první a druhé dvojice čtverců. K tomuto faktu přidáme ještě to, že pokud posuneme dlaždici o lichý počet jednotek, tak má její orientovaný obsah opačné znaménko. Pak umíme zjistit, které útvary mají jaký obsah (samozřejmě znaménko záleží na tom, na které křižovatce v druhém městě začneme, ale pokud je obsah nulový, tak se nezmění).

Nyní jsme již schopni generovat oktomina, která mají nulový orientovaný obsah v druhém městě a můžeme u nich použít podmínku podobnou jako u lichých tetromin. Pro ilustraci některá uvedu (viz obr. 32). Všiměme si, že všechna polyomnina, která mají vyšší řád než 4 a nulový obsah, jsou složena z lichých tetromin. Je tomu tak proto, že v základní dlaždici spolu sousedí čtverce jenom vrcholem, a proto musí vedle každé základní dlaždice se sudým (resp. lichým) orientovaným obsahem v druhém městě být základní dlaždice s lichým (resp. sudým) orientovaným obsahem v druhém městě.



obr. 32

Nebo naopak můžeme najít polyomina, která mají obsah nenulový a která zastávají podobnou roli jako čtvercová tetromina (viz např. věta 1). Opět některá polyomina uvádím.



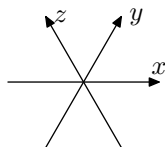
obr. 33

3.4. Zobecnění

3.4.1. Trojúhelníková síť

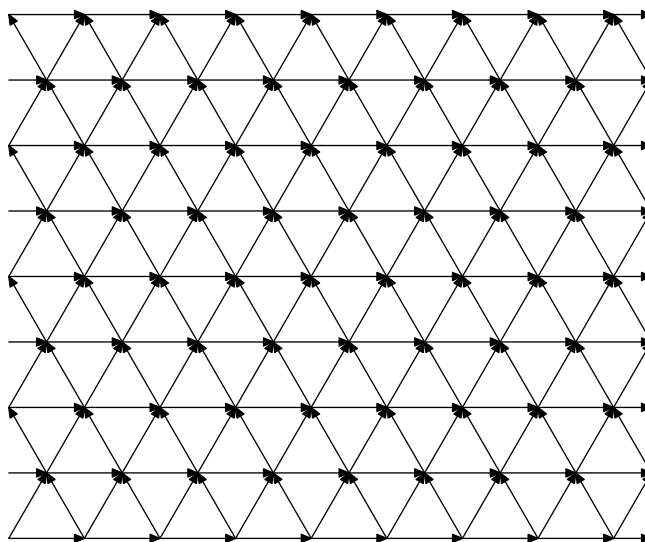
Na začátku jsme definovali i jiné sítě, např. trojúhelníkovou.

Pojmenujme si její osy. Osa x zůstává stejná jako vždy, osa y nechť má od osy x odchylku $+60^\circ$ a osa z má odchylku -60° (viz obr. 34).



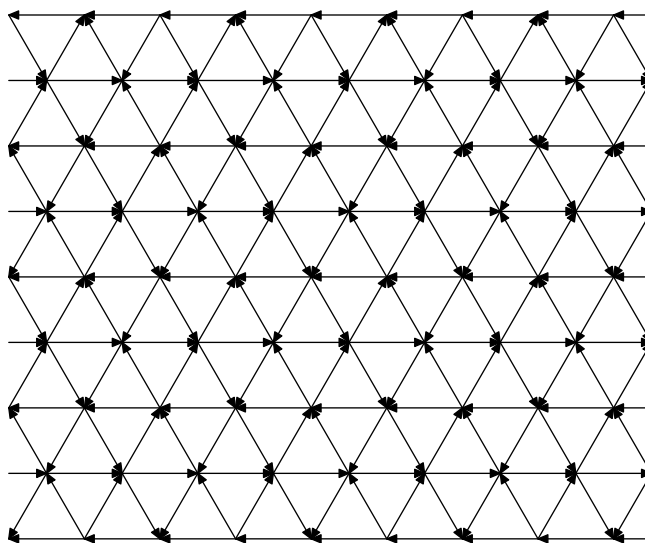
obr. 34

Nyní si opět představme dvě města. První město bude vypadat tak, že jeho ulice budou rovnoběžky s osami. Ulicemi povede opět doprava, která bude mít směr. V prvním městě povede doprava všemi rovnoběžnými ulicemi stejným směrem (viz obr. 35).



obr. 35

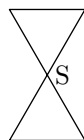
A v druhém městě povede doprava vždy ve dvou sousedních ulicích opačným směrem (viz obr. 36).



obr. 36

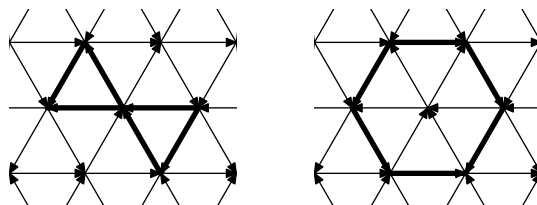
Znovu si představme, že projdeme trasu nejprve v prvním městě, a pak stejně popsanou trasu projdeme v druhém městě, přičemž trasu budeme opět popisovat, půjdeme-li po rovnoběžce s osou x, y nebo z a vydáme-li se po nebo proti směru vyznačené dopravy.

Jako byla u čtvercové sítě nejmenší dlaždice, která tvoří uzavřenou křivku v druhém městě, existuje i zde a vypadá podobně $(y^+; x^-; z^-; y^-; x^+; z^+)$:
(Dohodněme se, že bod dotyku trojúhelníků budeme nazývat středem S.)



obr. 37

Křivka základní dlaždice v druhém městě bude podobná jedné z těchto dvou, proto má smysl formulovat následující tvrzení.



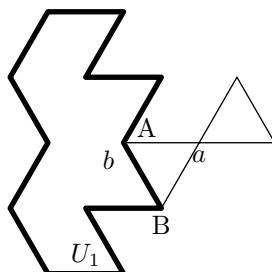
obr. 38

Tvrzení 3. Každý útvar, jež lze v prvním městě pokrýt pouze výše zmíněnými základními dlaždicemi, má v druhém městě uzavřenou křivku.

Důkaz: Provedeme indukci.

základní dlaždice – Pro základní dlaždici věta platí. Je třeba vyzkoušet pro libovolné otočení, že můžeme začít z libovolného uzlu a na libovolné ze čtyř křižovatek. Ve většině případů dostaneme obrázek podobný obrázku 38.

indukční krok – Pro spor předpokládejme, že máme daný nejmenší útvar U , který lze pokrýt pouze základními dlaždicemi v prvním městě, a přesto v druhém městě netvoří uzavřenou křivku. Zmenšíme tento útvar o jednu základní dlaždici (to je možné), vzniklý útvar U_1 tvoří uzavřenou křivku v druhém městě a základní dlaždice taky. Obejdeme-li (viz obr. 39) útvar U z bodu A do bodu A po cestě a , a pak zpět po trase a do bodu B a po úseku b do bodu A , pak jsme obešli útvar U_1 a základní dlaždici, tedy uzavřenou křivku v druhém městě. A protože cesta z bodu B do bodu A po trase a byla následována ihned cestou zpět, byla naše trase ekvivalentní s obejitím útvaru U , čímž dostáváme kýžený spor. \square



obr.39

Důsledek: V druhém městě má uzavřenou křivku například liché kosočtvercové tetromino (viz obr. 43) nebo šestiúhelník. Proto pokud budeme uvažovat šestiúhelníkovou síť, máme

zaručeno, že všechny křivky, které jsou uzavřené v prvním městě, budou uzavřené i v druhém městě.

S obsahy to je složitější. Označme si křižovatky typu 1, 2, 3, 4 podle následující tabulky 1:

typ	osa x	osa y	osa z
1	doleva	nahoru	nahoru
2	doleva	dolů	dolů
3	doprava	nahoru	dolů
4	doprava	dolů	nahoru

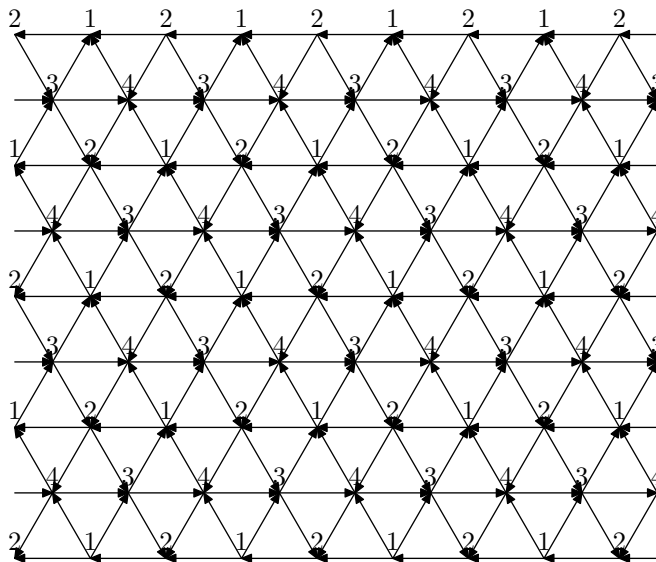
tab. 1

Následující tabulka udává orientované obsahy základních dlaždic, vždy otočených o $+60^\circ$ a -60° kolem středu. Obsah je uveden v „trojúhelnících“ (tato jednotka reprezentuje $\frac{\sqrt{3}}{4}$ čtverčných jednotek) a pokud v této kapitole nebude uvedeno jinak, bude jednotkou stále „trojúhelník“.

křižovatka	0°	-60°	$+60^\circ$
1	+2	+2	+2
2	-6	-6	-6
3	+2	+2	+2
4	+2	+2	+2

tab. 2

Z obrázku 40 je vidět, že každá křižovatka x_1 sousedí se dvěma křižovatkami typu x_2 , dvěma typu x_3 a x_4 , kde x_1, x_2, x_3, x_4 jsou různá čísla z množiny 1, 2, 3, 4. Proto nelze jednoznačně určit, jak se změní obsah posouváním, může buď zůstat stejný, a nebo se může zvětšit (resp. zmenšit) o 8. Zmenší se v případě posunu do křižovatky 2 (až na posun z křižovatky 2 na křižovatku 2, kdy obsah zůstává stejný) a zvětší při posunu z ní, zůstane stejný při ostatních posunutích.



obr. 40

Také u otáčení nemůžeme jednoznačně říci, jak se změní obsah, protože můžeme otáčet okolo všech čtyř křižovatek, a tedy každá křižovatka může přejít do jakékoli jiné.

Označení $(a; x^\circ)$ budeme chápat jako základní dlaždici se středem v křižovatce a a otočenou o x° od základní polohy. Podle různých křižovatek se otáčí základní dlaždice takto:

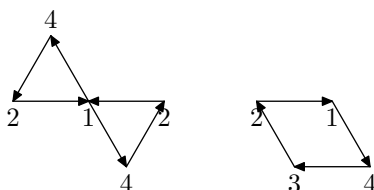
$$(a; 0^\circ) \rightarrow (b; -60^\circ) \rightarrow (c; +60^\circ)$$

$$(d; 0^\circ) \rightarrow (d; -60^\circ) \rightarrow (d; +60^\circ)$$

Kde $(a, b, c, d) \in \{(1,3,4,2); (3,4,1,2); (4,1,3,2); (2,4,3,1); (3,2,4,1); (4,3,2,1); (1,2,3,4); (2,3,1,4); (3,1,2,4); (1,4,2,3); (2,1,4,3); (4,2,1,3)\}$

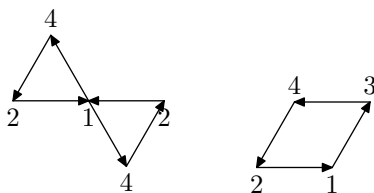
Zjistíme nyní, z čeho se skládá nejmenší dlaždice, která má nulový orientovaný obsah v druhém městě.

Nejdříve si musíme uvědomit jednu důležitou vlastnost: Pokud spojíme dvě základní dlaždice, ubude mezi nimi hrana, ta zmizí i v druhém městě, ale tam to může mít zásadní dopad na orientovaný obsah vzniklé křivky. Například spojíme-li základní dlaždice $(4, 0^\circ)$ a $(4, -60^\circ)$, ubude v druhém městě hrana spojující křižovatky 4 a 2. Orientovaný obsah každé základní dlaždice v druhém městě se zmenší o 4 trojúhelníky (viz obr. 41).



obr. 41

Ovšem všimněme si, že pokud spojíme například $(4, 0^\circ)$ s $(4, +60^\circ)$, obsah žádné ze základních dlaždic v druhém městě se nezmění. Je to opět vidět z obrázku:



obr. 42

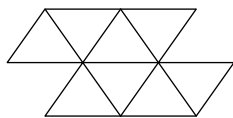
Změna obsahu nastane pouze v případě odebrání hran, které ve druhém městě neleží v přímce. Tyto změny udává tabulka:

typy kostek	chybějící hrana	změna obsahu
$(4, 0^\circ), (4, -60^\circ)$	24	-8
$(2, 0^\circ), (2, -60^\circ)$	24	+8
$(3, 0^\circ), (3, +60^\circ)$	23	-8
$(2, 0^\circ), (2, +60^\circ)$	23	+8
$(1, -60^\circ), (1, +60^\circ)$	12	-8
$(2, -60^\circ), (2, +60^\circ)$	12	+8

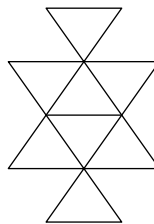
tab. 3

Spojíme-li dvě základní dlaždice dohromady, dostaneme dlaždici o velikosti 4 trojúhelníky a orientovaném obsahu v druhém městě +4 ($2+2$) nebo -4 ($2-6, -6-6+8$ a $2+2-8$). Celkem jsou dlaždice s orientovaným obsahem v druhém městě +4 všechny dvojice, které můžeme vybrat z devíti základních kostek o orientovaném obsahu +2 v druhém městě, bez výše uvedených 3. Tj. $\binom{9}{2} - 3 = 33$. Celkově je dvojic $\binom{12}{2} = 66$. Odtud je vidět, že dlaždic o orientovaném obsahu +4 a -4 je stejně.

Pokud spojíme dlaždice o orientovaném obsahu v druhém městě $+4$ a -4 , dostaneme dlaždici o obsahu 0 (Pokud nespojíme „špatné“ dlaždice uvedené v tab. 3). Ovšem tyto dlaždice se musí chovat stejně i po otočení, neboli přejde-li dlaždice s orientovaným obsahem v prvním městě $+4$ do dlaždice s orientovaným obsahem v druhém městě -4 , pak dlaždice s orientovaným obsahem v druhém městě musí tímto otočením přejít do dlaždice s orientovaným obsahem v druhém městě $+4$. Tyto typy chování jsou celkem 3. Každý typ chování má 22 dlaždic, z toho orientovaný obsah v druhém městě $+4$ má polovina, druhá polovina má -4 . Odtud je vidět, že celkem je nejmenších dlaždic o invariantním (nulovém) orientovaném obsahu v druhém městě $3 \cdot 11^2 = 363$. Některé zajímavé vidíme na obrázku, jsou to například liché kosočtvercové tetromino (obr. 43) nebo trojúhelníkový diamant typu 2 s obrácenými trojúhelníky (obr. 44).



obr. 43



obr. 44

Realizace těchto a dalších dlaždic s nulovým orientovaným obsahem v druhém městě může vypadat velmi různě. Například orientovaný obsah v druhém městě se nezmění, pokud posuneme buňky tak, že se vrcholy trojúhelníků, kterými se dotýkaly, vzdálí o $2k\sqrt{3}$, kde $k \in \mathbb{N}$. Speciální případem může být posunutí trojúhelníku po ose úhlu svíraného souřadnicovými osami o $2k\sqrt{3}$, kde $k \in \mathbb{N}$. Toto vše vyplývá z pravidelnosti sítě druhého města (vždy ob jednu rovnoběžku se nemění směr doprava).

Zformulujme následující tvrzení:

Tvrzení 4. Každý útvar, který lze pokrýt pouze diamanty typu 2 s obrácenými trojúhelníky má v druhém městě nulový orientovaný obsah.

Důkaz: Je analogický důkazu tvrzení 2. \square

Poznámka: Ve výše uvedeném tvrzení lze nahradit "diamant typu 2 s obrácenými trojúhelníky" jakoukoli jinou dlaždicí s nulovým orientovaným obsahem v druhém městě (viz výše).

3.4.2. Šestiúhelníková síť

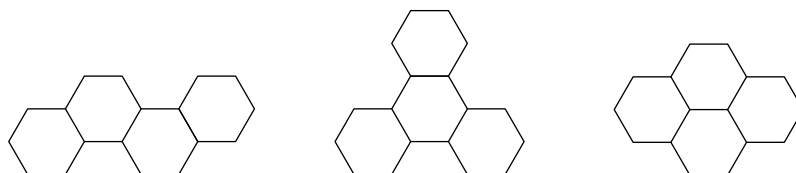
Z tvrzení 3 plyne, že šestiúhelník má vždy ve druhém městě uzavřenou křivku. Z předchozích úvah také plyne, že jeho orientovaný obsah ve druhém městě bude -2 (pokud bude mít střed v křižovatce typu 1,3 nebo 4) nebo $+6$ (pokud bude mít střed v křižovatce typu 2).

Proto, aby měl útvar v šestiúhelníkové síti invariantní nulový obsah vzhledem k posouvání a otáčení, musí obsahovat na jeden šestiúhelník se středem v křižovatce typu 2 ještě tři jiné s obsahem -2 .

Opět se pokusme najít nejmenší dlaždice v šestiúhelníkové síti, které budou mít nulový orientovaný obsah v druhém městě. Z výše uvedeného je jasné, že tady se změnami orientovaného obsahu spojováním v druhém městě zabývat nemusíme, protože dlaždice mají hrany, jejichž odebrání orientovaný obsah nezmění.

Aby dlaždice měla nulový obsah i po otočení, musí i po otočení obsahovat jeden šestiúhel-

ník, který má v druhém městě orientovaný obsah $+6$ a zbylé tři s obsahem -2 . Ze schématu otáčení (viz str. 23) je patrné, že aby tato podmínka byla splněna, musí dlaždice obsahovat 4 šestiúhelníky, každý na jiném typu křižovatky. Takové dlaždice existují tři a jsou nakreslené na obrázku.



obr. 45

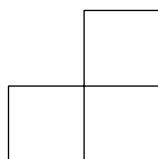
Také tady je na místě tvrzení.

Tvrzení 5. Každý útvar, který lze pokrýt pouze výše uvedenými dlaždicemi má v druhém městě nulový orientovaný obsah.

Důkaz: Je analogický důkazu tvrzení 2 a 4. \square

3.4.3. Popyplet

V předcházejícím textu jsem použila dlaždici typu následujícího (viz obr. 46):



obr. 46

Tato dlaždice se skládá ze dvou jednotkových čtverců, které nesousedí hranou, proto se nejedná o domino. Ovšem bylo by dobré tento útvar nějak pojmenovat.

Definice: Čtvercový popyplet je útvar skládající se z n jednotkových čtverců, které se dotýkají hranou nebo vrcholem.

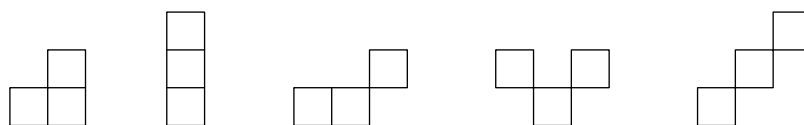
Příklad čtvercového monopletu je na obr. 47, na obr. 48 jsou dva čtvercové diplety a na obr. 49 vidíte 5 čtvercových tripletů.



obr. 47



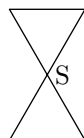
obr. 48



obr. 49

Stejně jako polyomina mohou čtvercové polyplety obsahovat díry. Narozdíl od polyomin, kde je první polyomino s dírou pro $n = 8$, je první polyplet s dírou už pro $n = 4$.

Podobně se v textu vyskytovala i dlaždice (viz obr. 50) a různé dlaždice z nich složené. I to je obecnější polyiamond.



obr. 50

Definice: *Trojúhelníkový polyplet* je útvar složený z n jednotkových trojúhelníků, které se dotýkají hranou nebo vrcholem. Pokud se dotýkají vrcholem, tak pouze stejným způsobem jako v trojúhelníkové síti.

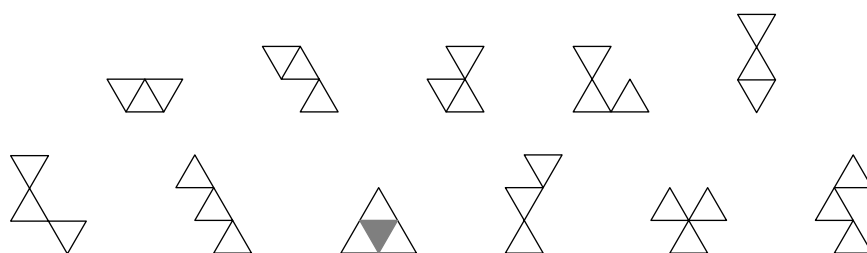
Na obr. 51 vidíte trojúhelníkový monoplet, na obr. 52 tři trojúhelníkové diplety a na obr. 53 11 trojúhelníkových tripletů. Trojúhelníkových tetrapletů je již 77.



obr. 51



obr. 52



obr. 53

Jak je vidět, budou existovat trojúhelníkové polyplety s dírami. První trojúhelníkový polyplet s dírou je pro $n = 3$ a je jeden, pro $n = 4$ je trojúhelníkových polypletů s dírou 5.

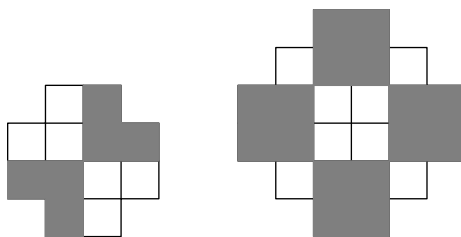
4. Použití

Jako ukázkou použití výše uvedených metod si můžeme vyřešit několik úloh ze světa diamantů.

Úloha 1:

Lze aztécký diamant pokrýt lichými tetrominy?

Řešení: Pro $n = 4k + 2$ a $n = 4k + 1$ lze pro řešení použít metodu obarvení. Obarvíme diamant následujícím způsobem (viz obr. 54)



obr. 54

Uvědomme si, že liché tetromino může v těchto diamantech pokrývat buď 3 černá pole a 1 bílé a nebo 1 bílé a 3 černá pole. Tedy vždy lichý počet. V případě $n = 4k + 2$ by bylo na pokrytí aztéckého diamantu třeba $\frac{2(4k+2)(4k+3)}{4} = \frac{16k^2+20k+6}{2} = 8k^2 + 10k + 3$ tetromin, což je lichý počet, tedy i tetromina by zabírala lichý počet černých i bílých polí, ale to nezabírají. Podobně pro $n = 4k + 1$ je potřeba $\frac{2(4k+1)(4k+2)}{4} = \frac{16k^2+16k+2}{2} = 8k^2 + 8k + 1$ tetromin, což je opět liché číslo. Pro uvedená n pak úloha řešení nemá.

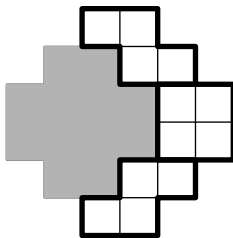
Bohužel pro $n = 4k + 3$ a $n = 4k$ tyto (ani jiné) obarvovací argumenty nefungují, protože počet dlaždic je sudý. Proto zde použijeme metody dvou měst a indukce.

Pro $n = 1$ je aztécký diamant pokryt jedním čtvercem, který může mít orientovaný obsah v druhém městě $+4$ nebo -4 , ale rozhodně není nulový, takže ho nelze pokrýt lichými tetrominy.

Nyní mějme aztécký diamant typu n , který nelze pokrýt lichými tetrominy. Rozlišme dvě varianty:

n je sudé

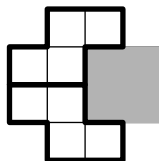
– získáme aztécký diamant typu $n + 1$ přidáním n lichých tetromin a jednoho čtvercového tetromina (viz obr. 55). Ovšem čtvercové tetromino bude mít ve druhém městě stejně orientovaný obsah jako ostatní čtvercová tetromina (aspoň jedno je v aztéckém diamantu typu n obsaženo, protože nejde pokrýt lichými tetrominy). Proto ani nyní nepůjde aztécký diamant pokrýt pouze lichými tetrominy.



obr. 55

n je liché

– získáme aztécký diamant typu $n+1$ přidáním $n+1$ lichých tetromin (viz obr. 56). Pokud nešel pokrýt aztécký diamant typu n lichými tetrominy, nepůjde ani tento.



obr. 56

Provedenou indukcí můžeme uzavřít tím, že aztécký diamant pouze lichými tetrominy pokrýt nelze.

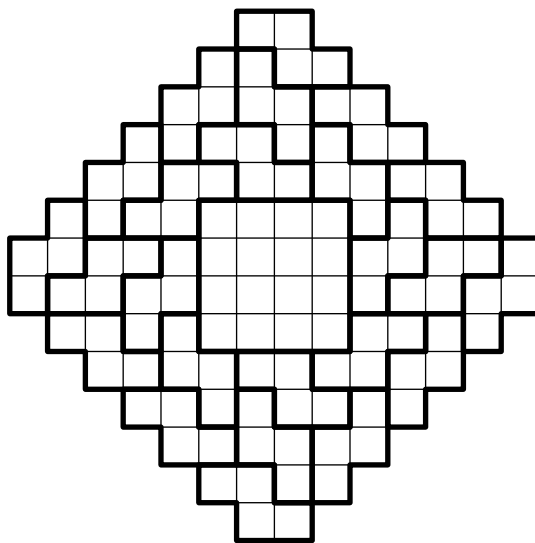
Úloha 2:

Následující úloha patřila až do devadesátých let minulého století k nevyřešeným. V roce 1997 ji vyřešil James Propp.

Mějme dán aztécký diamant velikosti $2k^2 - 1$ s vyřízlou dírou o velikosti $2k \times 2k$ uprostřed; pro která k přirozená lze tento útvar pokrýt pouze lichými tetrominy?

Řešení: Podobně jako v úloze předchozí si uvědomíme, jak lze pomocí přidávání lichých tetromin a čtvercových tetromin zvyšovat typ aztéckého diamantu. Indukcí dospějeme k tomu, že v diamantu typu n — pro n liché — je počet čtvercových tetromin, které mají všechna stejný orientovaný obsah, $\frac{n+1}{2}$. Tedy pro diamant typu $2k^2 - 1$ je počet čtverců k^2 . Ty by tedy měly přesně pokrýt díru uprostřed a zbytek by mohl být pokryt pouze lichými tetrominy. Ovšem to, že je orientovaný obsah v druhém městě 0, je podmínka nutná, nikoli postačující, a tak je třeba ještě nalézt důkaz, že to opravdu pro všechna uvažovaná k lze.

Aztécký diamant má tu vlastnost, že necháme-li ho rotovat okolo středu o $+90^\circ$, zůstane nezměněn. Nyní budeme mít aztécký diamant typu $2k^2 - 1$, který můžeme pokrýt k^2 čtvercovými tetrominy a zbytkem lichých tetromin. Odeberme z jeho obvodu lichá tetromina tak, aby se zachovala jeho vlastnost, že po otočení o $+90^\circ$ okolo středu se nezmění. Pak ovšem musíme dospět ke čtverci $2k \times 2k$. Tedy pro každé $k \in \mathbb{N}$ můžeme pokrýt aztécký diamant typu $2k^2 - 1$ s vyřízlou dírou o velikosti $2k \times 2k$ uprostřed lichými tetrominy. Na obrázku 57 je příklad pro $k = 2$.



obr. 57

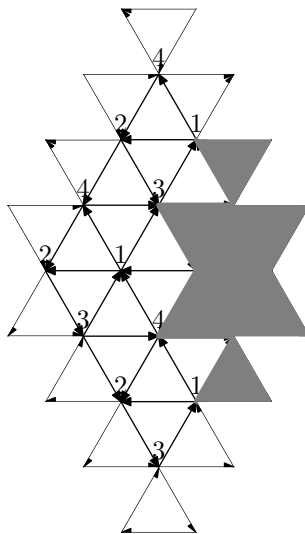
Pokusme se nyní pro zobecněné diamanty a zobecněná polyomina najít podobné úlohy.

Úloha 3:

Pro jaká n přirozená lze trojúhelníkový diamant typu n pokrýt trojúhelníkovými diamanty typu 2?

Řešení: Nejprve si uvědomíme, že trojúhelníkový diamant typu 2 má 8 trojúhelníků a pro n lichá se trojúhelníkové diamanty skládají z $2n^2$ trojúhelníků, což určitě není dělitelné 8. Případají tedy v úvahu n sudá, ta už mají počet trojúhelníků dělitelný 8. Dokážeme indukci, že pro ně existuje vhodné pokrytí.

Pro trojúhelníkový diamant typu 2 je vše v pořádku. Pokud chceme nyní typ diamantu zvětšit o 2, přidáme vždy na každé číslo křížovatky stejně základních kostek (viz obr. 58). Proto bude pokrytí existovat.



obr. 58

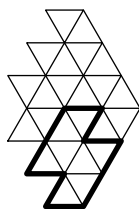
Pokrytí tedy existuje pro n sudá.

Úloha 4:

Pro která n přirozená lze aztécký trojúhelníkový diamant typu n pokrýt lichými kosočtvercovými tetrominy?

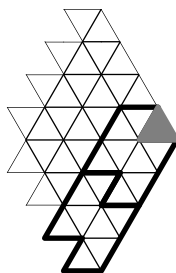
Řešení: Opět nám některé případy odpadnou pro špatný počet trojúhelníků. Pro n má trojúhelníkový aztécký diamant $2n(n+1)$ trojúhelníků, to je dělitelné 8 pouze pro $n = 4k$ a $n = 4k - 1$, kde $k \in \mathbb{N}$. I pro tyto hodnoty dokážeme, že pokrytí neexistuje.

Pro $n = 4k - 1$ lze použít metody lokálního uspořádání, protože situace bude vždy vypadat jako na obrázku 59. A tetromin se tam vejde $2k - 1$.



obr. 59

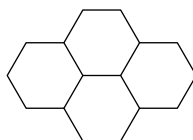
Stejně pro $n = 4k$ musíme vždy pokračovat dalším tetrominem až do doby, než nějaký trojúhelník nepokryjeme — viz obr. 60.



obr. 60

Úloha 5:

Pro která n přirozená lze šestiúhelníkový aztécký diamant typu n pokrýt kosočtvercovými tetrahexy (viz obr. 61)?



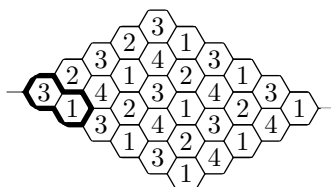
obr. 61

Řešení: Povšimněme si nejdříve počtu buněk. Šestiúhelníkový diamant typu n jich má $n^2 + n$, toto číslo je dělitelné čtyřmi pouze pro $n = 4k$ a pro $n = 4k - 1$, kde $k \in \mathbb{N}$. Ani pro tyto hodnoty n pokrytí neexistuje. Důkaz provedeme indukcí.

Na začátek si uvědomíme, že dlaždice, kterou pokrýváme, má nulový orientovaný obsah v druhém městě, a proto obsahuje na každém typu křížovatky v druhém městě jen jeden šestiúhelník. Pokud útvar lze pokrýt těmito dlaždicemi, má počty šestiúhelníků na všech křížovatkách stejné.

$n = 4k + 1$

– Obarvíme-li aztécký šestiúhelníkový diamant typu 4 podle toho, v jaké křížovatce v druhém městě má šestiúhelník střed, obarvíme barvami (bez újmy na obecnosti) 1 a 3 po jednom poli. Tzn. že pokrytí neexistuje. Máme-li aztécký šestiúhelníkový diamant typu n a zvětšíme-li jeho typ o 4 (viz obr. 62), přidáme barev 1 a 3 od každé $2k + 6$ polí a barev 2 a 4 od každé $2k + 4$. Pokud nešel pokrýt aztécký šestiúhelníkový diamant typu n , nepůjde tedy pokrýt ani aztécký šestiúhelníkový diamant typu $n + 4$.



obr. 62

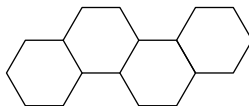
$n = 4k$

– Aztécký šestiúhelníkový diamant typu 1 má buňky obarveny (bez újmy na obecnosti) barvami 4 a 1 — od každé 4 pole ; barvami 2 a 3

— od každé 6 polí. Pokrytí proto neexistuje. Pokud zvětšíme typ aztéckého šestiúhelníkového diamantu z typu n na $n + 4$ (podobně jako na obr. 62), přidáme po $12k$ šestiúhelníků barev 4 a 1 a barev 2 a 3 po $12k + 2$. Proto dláždění neexistuje.

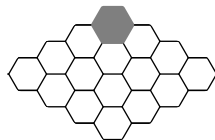
Úloha 6:

Pro jaká n přirozená lze šestiúhelníkový diamant typu n pokrýt tetrahexy z obrázku 63?



obr. 63

Řešení: Použijeme metody lokálního uspořádání. Pokud by pokrytí existovalo, muselo by být i vybarvenou dlaždicí na obrázku 64. To ovšem nelze, proto pokrytí neexistuje pro žádná n .



obr. 64

5. Závěr

5.1. Shrnutí

Zobecněné diamanty v trojúhelníkové síti mají podobné vlastnosti (např. počet buněk) jako čtvercové diamanty. Diamanty v šestiúhelníkové síti se už v počtu buněk liší. Taktéž metoda dvou měst fungovala ve čtvercové síti a trojúhelníkové síti podobně - existovaly zde základní kostky, které v šestiúhelníkové síti neexistovaly. Hlavní rozdíl je v tom, že ve čtvercové síti existovala jenom jedna dlaždice s nulovým orientovaným obsahem v druhém městě, kdežto v trojúhelníkové síti jich bylo 363 a v šestiúhelníkové síti 3. V trojúhelníkové i šestiúhelníkové síti také existují problémy dláždění diamantů podobné problémům v čtvercové síti.

5.2. Použití

Použití teorie dláždění je velmi různorodé. Pro běžného člověka má asi největší význam použití v umění a stavebnictví. Toto uplatnění začíná u vzorů na nádobí, jde přes vzory na oblečení (nekonečné vzory na látky), k dlažbám a dlaždicím, až k fasádám domů.

Další velmi rozsáhlé použití je v krystalografii, kde vědcům pomáhá poodkrýt vnitřní stavbu nerostů, nebo naopak nerosty identifikovat. Krystaly mohou jevit stejnou symetrii jako pokrytí roviny.

Teorie dláždění má také úzkou souvislost s ostatními odvětvími matematiky. Rozvíjí geometrii, teorii grup - dláždění je grupa s určitou symetrií, teorii čísel - například vytvářející funkce, kombinatoriku - počet různých dláždění, topologii, teorii grafů a další.

5.3. Možné problémy

První z možných problémů je zkoumání metody dvou měst v jiné než trojúhelníkové, čtvercové a šestiúhelníkové síti. Síť by mohla být například z nepravidelných n -úhleníků.

Také by bylo možno studovat případy, kdy doprava nepovede stále stejným směrem nebo jednou ulicí nahoru (resp. doprava) a další ulicí dolů (resp. doleva), ale kdy povede např. jednou ulicí nahoru (resp. doprava) a dalšími dvěma ulicemi dolů (resp. doleva), nebo se dokonce počty ulic vedoucích nahoru (resp. doprava) a dolů (resp. doleva) nebudou ani periodicky opakovat.

Zajímavým problémem by mohlo být zobecnění této metody pro trojrozměrný prostor a posléze i pro vícerozměrný prostor.

Posledním problémem, nad kterým bych se chtěla v budoucnosti zamyslet, je souvislost této teorie s jinými odvětvími matematiky (např. kombinatorika, teorie grup a teorie grafů). Tímto problémem jsem se nezabývala, neboť moje znalosti v těchto oborech nejsou na nalezení souvislostí dostačující.

6. Literatura

- [1] SENECHAL, MAJORIE – Quasicrystals and geometry
Cambridge: Cambridge University Press, 1995. ISBN 0 521 57541 9
- [2] PROPP, JAMES – A Pedestrian Approach To a Method of Conway, or, A Tale of Two Cities, *Mathematics Magazine*: časopis [online], prosinec 1997,
dostupné z <http://www.maa.org/pubs>
- [3] SENECHAL, MAJORIE – Tiling problems [online],
dostupné z <http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/tiling.html>
- [4] *Mathworld*: encyklopedie na internetu[online],
dostupné z <http://mathworld.wolfram.com/>
- [4] *Wikipedia*: encyklopedie na internetu [online],
dostupné z http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- [5] University of Washington: Pathbreakers [online],
dostupné z <http://www.washington.edu/research/pathbreakers/>

7. Přílohy

Příloha 1: Chování tetriamodů	1
-------------------------------------	---

Chování tetriamondů

V této příloze se nachází tabulky s chováním tetriamondů, které se vztahují ke kapitole 4.2.1 Trojúhelníková síť. Veškeré značení se shoduje se značením ve zmíněné kapitole.

Tabulky udávají otočení jednotlivých dvojic základních kostek. První sloupec obsahuje, jaké kostky otáčíme, druhý sloupec obsahuje, na které základní kostky se otočí po otočení o $+60^\circ$, a ve třetím sloupci jsou kostky, na které přejde první sloupec po otočení o -60° . V tabulce jsou tučně zvýrazněny dvojice základních dlaždic, které mají orientovaný obsah v druhém měště -4 , netučné dvojice základních dlaždic mají orientovaný obsah v druhém měště $+4$.

V poslední tabulce je shrnutí chování. Označme si typy chování A, B, C, D podle následující tabulky: ($x \in \{+4; -4\}$)

typ	obsah	obsah po otočení o $+60^\circ$	obsah po otočení o -60°
A	<i>x</i>	<i>x</i>	<i>x</i>
B	<i>x</i>	$-x$	$-x$
C	<i>x</i>	<i>x</i>	$-x$
D	<i>x</i>	$-x$	<i>x</i>

Nakonec jsou uvedeny dvojice dlaždic, které mají stejný typ chování při otáčení okolo všech křížovatek.

otočení okolo křižovatky typu 1

základní kostky	otočení o $+60^\circ$	otočení o -60°
$(2, 0^\circ), (2, -60^\circ)$	$(4, -60^\circ), (4, +60^\circ)$	$(3, +60^\circ), (3, 0^\circ)$
$(4, 0^\circ), (4, -60^\circ)$	$(3, -60^\circ), (3, +60^\circ)$	$(2, +60^\circ), (2, 0^\circ)$
$(3, 0^\circ), (3, +60^\circ)$	$(2, -60^\circ), (2, 0^\circ)$	$(4, +60^\circ), (4, -60^\circ)$
$(2, 0^\circ), (2, +60^\circ)$	$(4, -60^\circ), (4, 0^\circ)$	$(3, +60^\circ), (3, -60^\circ)$
$(1, -60^\circ), (1, +60^\circ)$	$(1, +60^\circ), (1, 0^\circ)$	$(1, 0^\circ), (1, -60^\circ)$
$(2, +60^\circ), (2, -60^\circ)$	$(4, 0^\circ), (4, +60^\circ)$	$(3, -60^\circ), (3, 0^\circ)$
$(2, 0^\circ), (4, 0^\circ)$	$(4, -60^\circ), (3, -60^\circ)$	$(3, +60^\circ), (2, +60^\circ)$
$(2, 0^\circ), (4, -60^\circ)$	$(4, -60^\circ), (3, +60^\circ)$	$(3, +60^\circ), (2, 0^\circ)$
$(2, 0^\circ), (4, +60^\circ)$	$(4, -60^\circ), (3, 0^\circ)$	$(3, +60^\circ), (2, -60^\circ)$
$(2, 0^\circ), (3, 0^\circ)$	$(4, -60^\circ), (2, -60^\circ)$	$(3, +60^\circ), (4, +60^\circ)$
$(2, 0^\circ), (3, -60^\circ)$	$(4, -60^\circ), (2, +60^\circ)$	$(3, +60^\circ), (4, 0^\circ)$
$(2, 0^\circ), (3, +60^\circ)$	$(4, -60^\circ), (2, 0^\circ)$	$(3, +60^\circ), (4, -60^\circ)$
$(2, 0^\circ), (1, 0^\circ)$	$(4, -60^\circ), (1, -60^\circ)$	$(3, +60^\circ), (1, +60^\circ)$
$(2, 0^\circ), (1, -60^\circ)$	$(4, -60^\circ), (1, +60^\circ)$	$(3, +60^\circ), (1, 0^\circ)$
$(2, 0^\circ), (1, +60^\circ)$	$(4, -60^\circ), (1, 0^\circ)$	$(3, +60^\circ), (1, -60^\circ)$
$(2, -60^\circ), (4, 0^\circ)$	$(4, +60^\circ), (3, -60^\circ)$	$(3, 0^\circ), (2, +60^\circ)$
$(2, -60^\circ), (4, -60^\circ)$	$(4, +60^\circ), (3, +60^\circ)$	$(3, 0^\circ), (2, 0^\circ)$
$(2, -60^\circ), (4, +60^\circ)$	$(4, +60^\circ), (3, 0^\circ)$	$(3, 0^\circ), (2, -60^\circ)$
$(2, -60^\circ), (3, 0^\circ)$	$(4, +60^\circ), (2, -60^\circ)$	$(3, 0^\circ), (4, +60^\circ)$
$(2, -60^\circ), (3, -60^\circ)$	$(4, +60^\circ), (2, +60^\circ)$	$(3, 0^\circ), (4, 0^\circ)$
$(2, -60^\circ), (3, +60^\circ)$	$(4, +60^\circ), (2, 0^\circ)$	$(3, 0^\circ), (4, -60^\circ)$
$(2, -60^\circ), (1, 0^\circ)$	$(4, +60^\circ), (1, -60^\circ)$	$(3, 0^\circ), (1, +60^\circ)$
$(2, -60^\circ), (1, -60^\circ)$	$(4, +60^\circ), (1, +60^\circ)$	$(3, 0^\circ), (1, 0^\circ)$
$(2, -60^\circ), (1, +60^\circ)$	$(4, +60^\circ), (1, 0^\circ)$	$(3, 0^\circ), (1, -60^\circ)$
$(2, +60^\circ), (4, 0^\circ)$	$(4, 0^\circ), (3, -60^\circ)$	$(3, -60^\circ), (2, +60^\circ)$
$(2, +60^\circ), (4, -60^\circ)$	$(4, 0^\circ), (3, +60^\circ)$	$(3, -60^\circ), (2, 0^\circ)$
$(2, +60^\circ), (4, +60^\circ)$	$(4, 0^\circ), (3, 0^\circ)$	$(3, -60^\circ), (2, -60^\circ)$
$(2, +60^\circ), (3, 0^\circ)$	$(4, 0^\circ), (2, -60^\circ)$	$(3, -60^\circ), (4, +60^\circ)$
$(2, +60^\circ), (3, -60^\circ)$	$(4, 0^\circ), (2, +60^\circ)$	$(3, -60^\circ), (4, 0^\circ)$
$(2, +60^\circ), (3, +60^\circ)$	$(4, 0^\circ), (2, 0^\circ)$	$(3, -60^\circ), (4, -60^\circ)$
$(2, +60^\circ), (1, 0^\circ)$	$(4, 0^\circ), (1, -60^\circ)$	$(3, -60^\circ), (1, +60^\circ)$
$(2, +60^\circ), (1, -60^\circ)$	$(4, 0^\circ), (1, +60^\circ)$	$(3, -60^\circ), (1, 0^\circ)$
$(2, +60^\circ), (1, +60^\circ)$	$(4, 0^\circ), (1, 0^\circ)$	$(3, -60^\circ), (1, -60^\circ)$

$(3, +60^\circ), (1, +60^\circ)$	$(2, 0^\circ), (1, 0^\circ)$	$(4, -60^\circ), (1, -60^\circ)$
$(1, 0^\circ), (1, +60^\circ)$	$(1, -60^\circ), (1, 0^\circ)$	$(1, +60^\circ), (1, -60^\circ)$
$(4, 0^\circ), (4, +60^\circ)$	$(3, -60^\circ), (3, 0^\circ)$	$(2, +60^\circ), (2, -60^\circ)$
$(4, 0^\circ), (3, 0^\circ)$	$(3, -60^\circ), (2, -60^\circ)$	$(2, +60^\circ), (4, +60^\circ)$
$(4, 0^\circ), (3, -60^\circ)$	$(3, -60^\circ), (2, +60^\circ)$	$(2, +60^\circ), (4, 0^\circ)$
$(4, 0^\circ), (3, +60^\circ)$	$(3, -60^\circ), (2, 0^\circ)$	$(2, +60^\circ), (4, -60^\circ)$
$(4, 0^\circ), (1, 0^\circ)$	$(3, -60^\circ), (1, -60^\circ)$	$(2, +60^\circ), (1, +60^\circ)$
$(4, 0^\circ), (1, -60^\circ)$	$(3, -60^\circ), (1, +60^\circ)$	$(2, +60^\circ), (1, 0^\circ)$
$(4, 0^\circ), (1, +60^\circ)$	$(3, -60^\circ), (1, 0^\circ)$	$(2, +60^\circ), (1, -60^\circ)$
$(4, -60^\circ), (4, +60^\circ)$	$(3, +60^\circ), (3, 0^\circ)$	$(2, 0^\circ), (2, -60^\circ)$
$(4, -60^\circ), (3, 0^\circ)$	$(3, +60^\circ), (2, -60^\circ)$	$(2, 0^\circ), (4, +60^\circ)$
$(4, -60^\circ), (3, -60^\circ)$	$(3, +60^\circ), (2, +60^\circ)$	$(2, 0^\circ), (4, 0^\circ)$
$(4, -60^\circ), (3, +60^\circ)$	$(3, +60^\circ), (2, 0^\circ)$	$(2, 0^\circ), (4, -60^\circ)$
$(4, -60^\circ), (1, 0^\circ)$	$(3, +60^\circ), (1, -60^\circ)$	$(2, 0^\circ), (1, +60^\circ)$
$(4, -60^\circ), (1, -60^\circ)$	$(3, +60^\circ), (1, +60^\circ)$	$(2, 0^\circ), (1, 0^\circ)$
$(4, -60^\circ), (1, +60^\circ)$	$(3, +60^\circ), (1, 0^\circ)$	$(2, 0^\circ), (1, -60^\circ)$
$(4, +60^\circ), (3, 0^\circ)$	$(3, 0^\circ), (2, -60^\circ)$	$(2, -60^\circ), (4, +60^\circ)$
$(4, +60^\circ), (3, -60^\circ)$	$(3, 0^\circ), (2, +60^\circ)$	$(2, -60^\circ), (4, 0^\circ)$
$(4, +60^\circ), (3, +60^\circ)$	$(3, 0^\circ), (2, 0^\circ)$	$(2, -60^\circ), (4, -60^\circ)$
$(4, +60^\circ), (1, 0^\circ)$	$(3, 0^\circ), (1, -60^\circ)$	$(2, -60^\circ), (1, +60^\circ)$
$(4, +60^\circ), (1, -60^\circ)$	$(3, 0^\circ), (1, +60^\circ)$	$(2, -60^\circ), (1, 0^\circ)$
$(4, +60^\circ), (1, +60^\circ)$	$(3, 0^\circ), (1, 0^\circ)$	$(2, -60^\circ), (1, -60^\circ)$
$(1, 0^\circ), (1, -60^\circ)$	$(1, -60^\circ), (1, +60^\circ)$	$(1, +60^\circ), (1, 0^\circ)$
$(3, 0^\circ), (1, 0^\circ)$	$(2, -60^\circ), (1, -60^\circ)$	$(4, +60^\circ), (1, +60^\circ)$
$(3, 0^\circ), (1, -60^\circ)$	$(2, -60^\circ), (1, +60^\circ)$	$(4, +60^\circ), (1, 0^\circ)$
$(3, 0^\circ), (1, +60^\circ)$	$(2, -60^\circ), (1, 0^\circ)$	$(4, +60^\circ), (1, -60^\circ)$
$(3, -60^\circ), (3, +60^\circ)$	$(2, +60^\circ), (2, 0^\circ)$	$(4, 0^\circ), (4, -60^\circ)$
$(3, -60^\circ), (1, 0^\circ)$	$(2, +60^\circ), (1, -60^\circ)$	$(4, 0^\circ), (1, +60^\circ)$
$(3, -60^\circ), (1, -60^\circ)$	$(2, +60^\circ), (1, +60^\circ)$	$(4, 0^\circ), (1, 0^\circ)$
$(3, -60^\circ), (1, +60^\circ)$	$(2, +60^\circ), (1, 0^\circ)$	$(4, 0^\circ), (1, -60^\circ)$
$(3, +60^\circ), (1, 0^\circ)$	$(2, 0^\circ), (1, -60^\circ)$	$(4, -60^\circ), (1, +60^\circ)$
$(3, +60^\circ), (1, -60^\circ)$	$(2, 0^\circ), (1, +60^\circ)$	$(4, -60^\circ), (1, 0^\circ)$
$(3, 0^\circ), (3, -60^\circ)$	$(2, -60^\circ), (2, +60^\circ)$	$(4, +60^\circ), (4, 0^\circ)$

otočení okolo křižovatky typu 2

základní kostky	otočení o $+60^\circ$	otočení o -60°
$(2, 0^\circ), (2, -60^\circ)$	$(2, -60^\circ), (2, +60^\circ)$	$(2, +60^\circ), (2, 0^\circ)$
$(4, 0^\circ), (4, -60^\circ)$	$(1, -60^\circ), (1, +60^\circ)$	$(3, +60^\circ), (3, 0^\circ)$
$(3, 0^\circ), (3, +60^\circ)$	$(4, -60^\circ), (4, 0^\circ)$	$(1, +60^\circ), (1, -60^\circ)$
$(2, 0^\circ), (2, +60^\circ)$	$(2, -60^\circ), (2, 0^\circ)$	$(2, +60^\circ), (2, -60^\circ)$
$(1, -60^\circ), (1, +60^\circ)$	$(3, +60^\circ), (3, 0^\circ)$	$(4, 0^\circ), (4, -60^\circ)$
$(2, +60^\circ), (2, -60^\circ)$	$(2, 0^\circ), (2, +60^\circ)$	$(2, -60^\circ), (2, 0^\circ)$
$(2, 0^\circ), (4, 0^\circ)$	$(2, -60^\circ), (1, -60^\circ)$	$(2, +60^\circ), (3, +60^\circ)$
$(2, 0^\circ), (4, -60^\circ)$	$(2, -60^\circ), (1, +60^\circ)$	$(2, +60^\circ), (3, 0^\circ)$
$(2, 0^\circ), (4, +60^\circ)$	$(2, -60^\circ), (1, 0^\circ)$	$(2, +60^\circ), (3, -60^\circ)$
$(2, 0^\circ), (3, 0^\circ)$	$(2, -60^\circ), (4, -60^\circ)$	$(2, +60^\circ), (1, +60^\circ)$
$(2, 0^\circ), (3, -60^\circ)$	$(2, -60^\circ), (4, +60^\circ)$	$(2, +60^\circ), (1, 0^\circ)$
$(2, 0^\circ), (3, +60^\circ)$	$(2, -60^\circ), (4, 0^\circ)$	$(2, +60^\circ), (1, -60^\circ)$
$(2, 0^\circ), (1, 0^\circ)$	$(2, -60^\circ), (3, -60^\circ)$	$(2, +60^\circ), (4, +60^\circ)$
$(2, 0^\circ), (1, -60^\circ)$	$(2, -60^\circ), (3, +60^\circ)$	$(2, +60^\circ), (4, 0^\circ)$
$(2, 0^\circ), (1, +60^\circ)$	$(2, -60^\circ), (3, 0^\circ)$	$(2, +60^\circ), (4, -60^\circ)$
$(2, -60^\circ), (4, 0^\circ)$	$(2, +60^\circ), (1, -60^\circ)$	$(2, 0^\circ), (3, +60^\circ)$
$(2, -60^\circ), (4, -60^\circ)$	$(2, +60^\circ), (1, +60^\circ)$	$(2, 0^\circ), (3, 0^\circ)$
$(2, -60^\circ), (4, +60^\circ)$	$(2, +60^\circ), (1, 0^\circ)$	$(2, 0^\circ), (3, -60^\circ)$
$(2, -60^\circ), (3, 0^\circ)$	$(2, +60^\circ), (4, -60^\circ)$	$(2, 0^\circ), (1, +60^\circ)$
$(2, -60^\circ), (3, -60^\circ)$	$(2, +60^\circ), (4, +60^\circ)$	$(2, 0^\circ), (1, 0^\circ)$
$(2, -60^\circ), (3, +60^\circ)$	$(2, +60^\circ), (4, 0^\circ)$	$(2, 0^\circ), (1, -60^\circ)$
$(2, -60^\circ), (1, 0^\circ)$	$(2, +60^\circ), (3, -60^\circ)$	$(2, 0^\circ), (4, +60^\circ)$
$(2, -60^\circ), (1, -60^\circ)$	$(2, +60^\circ), (3, +60^\circ)$	$(2, 0^\circ), (4, 0^\circ)$
$(2, -60^\circ), (1, +60^\circ)$	$(2, +60^\circ), (3, 0^\circ)$	$(2, 0^\circ), (4, -60^\circ)$
$(2, +60^\circ), (4, 0^\circ)$	$(2, 0^\circ), (1, -60^\circ)$	$(2, -60^\circ), (3, +60^\circ)$
$(2, +60^\circ), (4, -60^\circ)$	$(2, 0^\circ), (1, +60^\circ)$	$(2, -60^\circ), (3, 0^\circ)$
$(2, +60^\circ), (4, +60^\circ)$	$(2, 0^\circ), (1, 0^\circ)$	$(2, -60^\circ), (3, -60^\circ)$
$(2, +60^\circ), (3, 0^\circ)$	$(2, 0^\circ), (4, -60^\circ)$	$(2, -60^\circ), (1, +60^\circ)$
$(2, +60^\circ), (3, -60^\circ)$	$(2, 0^\circ), (4, +60^\circ)$	$(2, -60^\circ), (1, 0^\circ)$
$(2, +60^\circ), (3, +60^\circ)$	$(2, 0^\circ), (4, 0^\circ)$	$(2, -60^\circ), (1, -60^\circ)$
$(2, +60^\circ), (1, 0^\circ)$	$(2, 0^\circ), (3, -60^\circ)$	$(2, -60^\circ), (4, +60^\circ)$
$(2, +60^\circ), (1, -60^\circ)$	$(2, 0^\circ), (3, +60^\circ)$	$(2, -60^\circ), (4, 0^\circ)$
$(2, +60^\circ), (1, +60^\circ)$	$(2, 0^\circ), (3, 0^\circ)$	$(2, -60^\circ), (4, -60^\circ)$

$(3, +60^\circ), (1, +60^\circ)$	$(4, 0^\circ), (3, 0^\circ)$	$(1, -60^\circ), (4, -60^\circ)$
$(1, 0^\circ), (1, +60^\circ)$	$(3, -60^\circ), (3, 0^\circ)$	$(4, +60^\circ), (4, -60^\circ)$
$(4, 0^\circ), (4, +60^\circ)$	$(1, -60^\circ), (1, 0^\circ)$	$(3, +60^\circ), (3, -60^\circ)$
$(4, 0^\circ), (3, 0^\circ)$	$(1, -60^\circ), (4, -60^\circ)$	$(3, +60^\circ), (1, +60^\circ)$
$(4, 0^\circ), (3, -60^\circ)$	$(1, -60^\circ), (4, +60^\circ)$	$(3, +60^\circ), (1, 0^\circ)$
$(4, 0^\circ), (3, +60^\circ)$	$(1, -60^\circ), (4, 0^\circ)$	$(3, +60^\circ), (1, -60^\circ)$
$(4, 0^\circ), (1, 0^\circ)$	$(1, -60^\circ), (3, -60^\circ)$	$(3, +60^\circ), (4, +60^\circ)$
$(4, 0^\circ), (1, -60^\circ)$	$(1, -60^\circ), (3, +60^\circ)$	$(3, +60^\circ), (4, 0^\circ)$
$(4, 0^\circ), (1, +60^\circ)$	$(1, -60^\circ), (3, 0^\circ)$	$(3, +60^\circ), (4, -60^\circ)$
$(4, -60^\circ), (4, +60^\circ)$	$(1, +60^\circ), (1, 0^\circ)$	$(3, 0^\circ), (3, -60^\circ)$
$(4, -60^\circ), (3, 0^\circ)$	$(1, +60^\circ), (4, -60^\circ)$	$(3, 0^\circ), (1, +60^\circ)$
$(4, -60^\circ), (3, -60^\circ)$	$(1, +60^\circ), (4, +60^\circ)$	$(3, 0^\circ), (1, 0^\circ)$
$(4, -60^\circ), (3, +60^\circ)$	$(1, +60^\circ), (4, 0^\circ)$	$(3, 0^\circ), (1, -60^\circ)$
$(4, -60^\circ), (1, 0^\circ)$	$(1, +60^\circ), (3, -60^\circ)$	$(3, 0^\circ), (4, +60^\circ)$
$(4, -60^\circ), (1, -60^\circ)$	$(1, +60^\circ), (3, +60^\circ)$	$(3, 0^\circ), (4, 0^\circ)$
$(4, -60^\circ), (1, +60^\circ)$	$(1, +60^\circ), (3, 0^\circ)$	$(3, 0^\circ), (4, -60^\circ)$
$(4, +60^\circ), (3, 0^\circ)$	$(1, 0^\circ), (4, -60^\circ)$	$(3, -60^\circ), (1, +60^\circ)$
$(4, +60^\circ), (3, -60^\circ)$	$(1, 0^\circ), (4, +60^\circ)$	$(3, -60^\circ), (1, 0^\circ)$
$(4, +60^\circ), (3, +60^\circ)$	$(1, 0^\circ), (4, 0^\circ)$	$(3, -60^\circ), (1, -60^\circ)$
$(4, +60^\circ), (1, 0^\circ)$	$(1, 0^\circ), (3, -60^\circ)$	$(3, -60^\circ), (4, +60^\circ)$
$(4, +60^\circ), (1, -60^\circ)$	$(1, 0^\circ), (3, +60^\circ)$	$(3, -60^\circ), (4, 0^\circ)$
$(4, +60^\circ), (1, +60^\circ)$	$(1, 0^\circ), (3, 0^\circ)$	$(3, -60^\circ), (4, -60^\circ)$
$(1, 0^\circ), (1, -60^\circ)$	$(3, -60^\circ), (3, +60^\circ)$	$(4, +60^\circ), (4, 0^\circ)$
$(3, 0^\circ), (1, 0^\circ)$	$(4, -60^\circ), (3, -60^\circ)$	$(1, +60^\circ), (4, +60^\circ)$
$(3, 0^\circ), (1, -60^\circ)$	$(4, -60^\circ), (3, +60^\circ)$	$(1, +60^\circ), (4, 0^\circ)$
$(3, 0^\circ), (1, +60^\circ)$	$(4, -60^\circ), (3, 0^\circ)$	$(1, +60^\circ), (4, -60^\circ)$
$(3, -60^\circ), (3, +60^\circ)$	$(4, +60^\circ), (4, 0^\circ)$	$(1, 0^\circ), (1, -60^\circ)$
$(3, -60^\circ), (1, 0^\circ)$	$(4, +60^\circ), (3, -60^\circ)$	$(1, 0^\circ), (4, +60^\circ)$
$(3, -60^\circ), (1, -60^\circ)$	$(4, +60^\circ), (3, +60^\circ)$	$(1, 0^\circ), (4, 0^\circ)$
$(3, -60^\circ), (1, +60^\circ)$	$(4, +60^\circ), (3, 0^\circ)$	$(1, 0^\circ), (4, -60^\circ)$
$(3, +60^\circ), (1, 0^\circ)$	$(4, 0^\circ), (3, -60^\circ)$	$(1, -60^\circ), (4, +60^\circ)$
$(3, +60^\circ), (1, -60^\circ)$	$(4, 0^\circ), (3, +60^\circ)$	$(1, -60^\circ), (4, 0^\circ)$
$(3, 0^\circ), (3, -60^\circ)$	$(2, -60^\circ), (2, +60^\circ)$	$(4, +60^\circ), (4, 0^\circ)$

otočení okolo křižovatky typu 3

základní kostky	otočení o $+60^\circ$	otočení o -60°
$(2, 0^\circ), (2, -60^\circ)$	$(1, -60^\circ), (1, +60^\circ)$	$(4, +60^\circ), (4, 0^\circ)$
$(4, 0^\circ), (4, -60^\circ)$	$(2, -60^\circ), (2, +60^\circ)$	$(1, +60^\circ), (1, 0^\circ)$
$(3, 0^\circ), (3, +60^\circ)$	$(3, -60^\circ), (3, 0^\circ)$	$(3, +60^\circ), (3, -60^\circ)$
$(2, 0^\circ), (2, +60^\circ)$	$(1, -60^\circ), (1, 0^\circ)$	$(4, +60^\circ), (4, -60^\circ)$
$(1, -60^\circ), (1, +60^\circ)$	$(4, +60^\circ), (4, 0^\circ)$	$(2, 0^\circ), (2, -60^\circ)$
$(2, +60^\circ), (2, -60^\circ)$	$(1, 0^\circ), (1, +60^\circ)$	$(4, -60^\circ), (4, 0^\circ)$
$(2, 0^\circ), (4, 0^\circ)$	$(1, -60^\circ), (2, -60^\circ)$	$(4, +60^\circ), (1, +60^\circ)$
$(2, 0^\circ), (4, -60^\circ)$	$(1, -60^\circ), (2, +60^\circ)$	$(4, +60^\circ), (1, 0^\circ)$
$(2, 0^\circ), (4, +60^\circ)$	$(1, -60^\circ), (2, 0^\circ)$	$(4, +60^\circ), (1, -60^\circ)$
$(2, 0^\circ), (3, 0^\circ)$	$(1, -60^\circ), (3, -60^\circ)$	$(4, +60^\circ), (3, +60^\circ)$
$(2, 0^\circ), (3, -60^\circ)$	$(1, -60^\circ), (3, +60^\circ)$	$(4, +60^\circ), (3, 0^\circ)$
$(2, 0^\circ), (3, +60^\circ)$	$(1, -60^\circ), (3, 0^\circ)$	$(4, +60^\circ), (3, -60^\circ)$
$(2, 0^\circ), (1, 0^\circ)$	$(1, -60^\circ), (4, -60^\circ)$	$(4, +60^\circ), (2, +60^\circ)$
$(2, 0^\circ), (1, -60^\circ)$	$(1, -60^\circ), (4, +60^\circ)$	$(4, +60^\circ), (2, 0^\circ)$
$(2, 0^\circ), (1, +60^\circ)$	$(1, -60^\circ), (4, 0^\circ)$	$(4, +60^\circ), (2, -60^\circ)$
$(2, -60^\circ), (4, 0^\circ)$	$(1, +60^\circ), (2, -60^\circ)$	$(4, 0^\circ), (1, +60^\circ)$
$(2, -60^\circ), (4, -60^\circ)$	$(1, +60^\circ), (2, +60^\circ)$	$(4, 0^\circ), (1, 0^\circ)$
$(2, -60^\circ), (4, +60^\circ)$	$(1, +60^\circ), (2, 0^\circ)$	$(4, 0^\circ), (1, -60^\circ)$
$(2, -60^\circ), (3, 0^\circ)$	$(1, +60^\circ), (3, -60^\circ)$	$(4, 0^\circ), (3, +60^\circ)$
$(2, -60^\circ), (3, -60^\circ)$	$(1, +60^\circ), (3, +60^\circ)$	$(4, 0^\circ), (3, 0^\circ)$
$(2, -60^\circ), (3, +60^\circ)$	$(1, +60^\circ), (3, 0^\circ)$	$(4, 0^\circ), (3, -60^\circ)$
$(2, -60^\circ), (1, 0^\circ)$	$(1, +60^\circ), (4, -60^\circ)$	$(4, 0^\circ), (2, +60^\circ)$
$(2, -60^\circ), (1, -60^\circ)$	$(1, +60^\circ), (4, +60^\circ)$	$(4, 0^\circ), (2, 0^\circ)$
$(2, -60^\circ), (1, +60^\circ)$	$(1, +60^\circ), (4, 0^\circ)$	$(4, 0^\circ), (2, -60^\circ)$
$(2, +60^\circ), (4, 0^\circ)$	$(1, 0^\circ), (2, -60^\circ)$	$(4, -60^\circ), (1, +60^\circ)$
$(2, +60^\circ), (4, -60^\circ)$	$(1, 0^\circ), (2, +60^\circ)$	$(4, -60^\circ), (1, 0^\circ)$
$(2, +60^\circ), (4, +60^\circ)$	$(1, 0^\circ), (2, 0^\circ)$	$(4, -60^\circ), (1, -60^\circ)$
$(2, +60^\circ), (3, 0^\circ)$	$(1, 0^\circ), (3, -60^\circ)$	$(4, -60^\circ), (3, +60^\circ)$
$(2, +60^\circ), (3, -60^\circ)$	$(1, 0^\circ), (3, +60^\circ)$	$(4, -60^\circ), (3, 0^\circ)$
$(2, +60^\circ), (3, +60^\circ)$	$(1, 0^\circ), (3, 0^\circ)$	$(4, -60^\circ), (3, -60^\circ)$
$(2, +60^\circ), (1, 0^\circ)$	$(1, 0^\circ), (4, -60^\circ)$	$(4, -60^\circ), (2, +60^\circ)$
$(2, +60^\circ), (1, -60^\circ)$	$(1, 0^\circ), (4, +60^\circ)$	$(4, -60^\circ), (2, 0^\circ)$
$(2, +60^\circ), (1, +60^\circ)$	$(1, 0^\circ), (4, 0^\circ)$	$(4, -60^\circ), (2, -60^\circ)$

$(3, +60^\circ), (1, +60^\circ)$	$(3, 0^\circ), (4, 0^\circ)$	$(3, -60^\circ), (2, -60^\circ)$
$(1, 0^\circ), (1, +60^\circ)$	$(4, -60^\circ), (4, 0^\circ)$	$(2, +60^\circ), (2, -60^\circ)$
$(4, 0^\circ), (4, +60^\circ)$	$(2, -60^\circ), (2, 0^\circ)$	$(1, +60^\circ), (1, -60^\circ)$
$(4, 0^\circ), (3, 0^\circ)$	$(2, -60^\circ), (3, -60^\circ)$	$(1, +60^\circ), (3, +60^\circ)$
$(4, 0^\circ), (3, -60^\circ)$	$(2, -60^\circ), (3, +60^\circ)$	$(1, +60^\circ), (3, 0^\circ)$
$(4, 0^\circ), (3, +60^\circ)$	$(2, -60^\circ), (3, 0^\circ)$	$(1, +60^\circ), (3, -60^\circ)$
$(4, 0^\circ), (1, 0^\circ)$	$(2, -60^\circ), (4, -60^\circ)$	$(1, +60^\circ), (2, +60^\circ)$
$(4, 0^\circ), (1, -60^\circ)$	$(2, -60^\circ), (4, +60^\circ)$	$(1, +60^\circ), (2, 0^\circ)$
$(4, 0^\circ), (1, +60^\circ)$	$(2, -60^\circ), (4, 0^\circ)$	$(1, +60^\circ), (2, -60^\circ)$
$(4, -60^\circ), (4, +60^\circ)$	$(2, +60^\circ), (2, 0^\circ)$	$(1, 0^\circ), (1, -60^\circ)$
$(4, -60^\circ), (3, 0^\circ)$	$(2, +60^\circ), (3, -60^\circ)$	$(1, 0^\circ), (3, +60^\circ)$
$(4, -60^\circ), (3, -60^\circ)$	$(2, +60^\circ), (3, +60^\circ)$	$(1, 0^\circ), (3, 0^\circ)$
$(4, -60^\circ), (3, +60^\circ)$	$(2, +60^\circ), (3, 0^\circ)$	$(1, 0^\circ), (3, -60^\circ)$
$(4, -60^\circ), (1, 0^\circ)$	$(2, +60^\circ), (4, -60^\circ)$	$(1, 0^\circ), (2, +60^\circ)$
$(4, -60^\circ), (1, -60^\circ)$	$(2, +60^\circ), (4, +60^\circ)$	$(1, 0^\circ), (2, 0^\circ)$
$(4, -60^\circ), (1, +60^\circ)$	$(2, +60^\circ), (4, 0^\circ)$	$(1, 0^\circ), (2, -60^\circ)$
$(4, +60^\circ), (3, 0^\circ)$	$(2, 0^\circ), (3, -60^\circ)$	$(1, -60^\circ), (3, +60^\circ)$
$(4, +60^\circ), (3, -60^\circ)$	$(2, 0^\circ), (3, +60^\circ)$	$(1, -60^\circ), (3, 0^\circ)$
$(4, +60^\circ), (3, +60^\circ)$	$(2, 0^\circ), (3, 0^\circ)$	$(1, -60^\circ), (3, -60^\circ)$
$(4, +60^\circ), (1, 0^\circ)$	$(2, 0^\circ), (4, -60^\circ)$	$(1, -60^\circ), (2, +60^\circ)$
$(4, +60^\circ), (1, -60^\circ)$	$(2, 0^\circ), (4, +60^\circ)$	$(1, -60^\circ), (2, 0^\circ)$
$(4, +60^\circ), (1, +60^\circ)$	$(2, 0^\circ), (4, 0^\circ)$	$(1, -60^\circ), (2, -60^\circ)$
$(1, 0^\circ), (1, -60^\circ)$	$(4, -60^\circ), (4, +60^\circ)$	$(2, +60^\circ), (2, 0^\circ)$
$(3, 0^\circ), (1, 0^\circ)$	$(3, -60^\circ), (4, -60^\circ)$	$(3, +60^\circ), (2, +60^\circ)$
$(3, 0^\circ), (1, -60^\circ)$	$(3, -60^\circ), (4, +60^\circ)$	$(3, +60^\circ), (2, 0^\circ)$
$(3, 0^\circ), (1, +60^\circ)$	$(3, -60^\circ), (4, 0^\circ)$	$(3, +60^\circ), (2, -60^\circ)$
$(3, -60^\circ), (3, +60^\circ)$	$(3, +60^\circ), (3, 0^\circ)$	$(3, 0^\circ), (3, -60^\circ)$
$(3, -60^\circ), (1, 0^\circ)$	$(3, +60^\circ), (4, -60^\circ)$	$(3, 0^\circ), (2, +60^\circ)$
$(3, -60^\circ), (1, -60^\circ)$	$(3, +60^\circ), (4, +60^\circ)$	$(3, 0^\circ), (2, 0^\circ)$
$(3, -60^\circ), (1, +60^\circ)$	$(3, +60^\circ), (4, 0^\circ)$	$(3, 0^\circ), (2, -60^\circ)$
$(3, +60^\circ), (1, 0^\circ)$	$(3, 0^\circ), (4, -60^\circ)$	$(3, -60^\circ), (2, +60^\circ)$
$(3, +60^\circ), (1, -60^\circ)$	$(3, 0^\circ), (4, +60^\circ)$	$(3, -60^\circ), (2, 0^\circ)$
$(3, 0^\circ), (3, -60^\circ)$	$(2, -60^\circ), (2, +60^\circ)$	$(4, +60^\circ), (4, 0^\circ)$

otočení okolo křižovatky typu 4

základní kostky	otočení o $+60^\circ$	otočení o -60°
$(2, 0^\circ), (2, -60^\circ)$	$(3, -60^\circ), (3, +60^\circ)$	$(1, +60^\circ), (1, 0^\circ)$
$(4, 0^\circ), (4, -60^\circ)$	$(4, -60^\circ), (4, +60^\circ)$	$(4, +60^\circ), (4, 0^\circ)$
$(3, 0^\circ), (3, +60^\circ)$	$(1, -60^\circ), (1, 0^\circ)$	$(2, +60^\circ), (2, -60^\circ)$
$(2, 0^\circ), (2, +60^\circ)$	$(3, -60^\circ), (3, 0^\circ)$	$(1, +60^\circ), (1, -60^\circ)$
$(1, -60^\circ), (1, +60^\circ)$	$(2, +60^\circ), (2, 0^\circ)$	$(3, 0^\circ), (3, -60^\circ)$
$(2, +60^\circ), (2, -60^\circ)$	$(3, 0^\circ), (3, +60^\circ)$	$(1, -60^\circ), (1, 0^\circ)$
$(2, 0^\circ), (4, 0^\circ)$	$(3, -60^\circ), (4, -60^\circ)$	$(1, +60^\circ), (4, +60^\circ)$
$(2, 0^\circ), (4, -60^\circ)$	$(3, -60^\circ), (4, +60^\circ)$	$(1, +60^\circ), (4, 0^\circ)$
$(2, 0^\circ), (4, +60^\circ)$	$(3, -60^\circ), (4, 0^\circ)$	$(1, +60^\circ), (4, -60^\circ)$
$(2, 0^\circ), (3, 0^\circ)$	$(3, -60^\circ), (1, -60^\circ)$	$(1, +60^\circ), (2, +60^\circ)$
$(2, 0^\circ), (3, -60^\circ)$	$(3, -60^\circ), (1, +60^\circ)$	$(1, +60^\circ), (2, 0^\circ)$
$(2, 0^\circ), (3, +60^\circ)$	$(3, -60^\circ), (1, 0^\circ)$	$(1, +60^\circ), (2, -60^\circ)$
$(2, 0^\circ), (1, 0^\circ)$	$(3, -60^\circ), (2, -60^\circ)$	$(1, +60^\circ), (3, +60^\circ)$
$(2, 0^\circ), (1, -60^\circ)$	$(3, -60^\circ), (2, +60^\circ)$	$(1, +60^\circ), (3, 0^\circ)$
$(2, 0^\circ), (1, +60^\circ)$	$(3, -60^\circ), (2, 0^\circ)$	$(1, +60^\circ), (3, -60^\circ)$
$(2, -60^\circ), (4, 0^\circ)$	$(3, +60^\circ), (4, -60^\circ)$	$(1, 0^\circ), (4, +60^\circ)$
$(2, -60^\circ), (4, -60^\circ)$	$(3, +60^\circ), (4, +60^\circ)$	$(1, 0^\circ), (4, 0^\circ)$
$(2, -60^\circ), (4, +60^\circ)$	$(3, +60^\circ), (4, 0^\circ)$	$(1, 0^\circ), (4, -60^\circ)$
$(2, -60^\circ), (3, 0^\circ)$	$(3, +60^\circ), (1, -60^\circ)$	$(1, 0^\circ), (2, +60^\circ)$
$(2, -60^\circ), (3, -60^\circ)$	$(3, +60^\circ), (1, +60^\circ)$	$(1, 0^\circ), (2, 0^\circ)$
$(2, -60^\circ), (3, +60^\circ)$	$(3, +60^\circ), (1, 0^\circ)$	$(1, 0^\circ), (2, -60^\circ)$
$(2, -60^\circ), (1, 0^\circ)$	$(3, +60^\circ), (2, -60^\circ)$	$(1, 0^\circ), (3, +60^\circ)$
$(2, -60^\circ), (1, -60^\circ)$	$(3, +60^\circ), (2, +60^\circ)$	$(1, 0^\circ), (3, 0^\circ)$
$(2, -60^\circ), (1, +60^\circ)$	$(3, +60^\circ), (2, 0^\circ)$	$(1, 0^\circ), (3, -60^\circ)$
$(2, +60^\circ), (4, 0^\circ)$	$(3, 0^\circ), (4, -60^\circ)$	$(1, -60^\circ), (4, +60^\circ)$
$(2, +60^\circ), (4, -60^\circ)$	$(3, 0^\circ), (4, +60^\circ)$	$(1, -60^\circ), (4, 0^\circ)$
$(2, +60^\circ), (4, +60^\circ)$	$(3, 0^\circ), (4, 0^\circ)$	$(1, -60^\circ), (4, -60^\circ)$
$(2, +60^\circ), (3, 0^\circ)$	$(3, 0^\circ), (1, -60^\circ)$	$(1, -60^\circ), (2, +60^\circ)$
$(2, +60^\circ), (3, -60^\circ)$	$(3, 0^\circ), (1, +60^\circ)$	$(1, -60^\circ), (2, 0^\circ)$
$(2, +60^\circ), (3, +60^\circ)$	$(3, 0^\circ), (1, 0^\circ)$	$(1, -60^\circ), (2, -60^\circ)$
$(2, +60^\circ), (1, 0^\circ)$	$(3, 0^\circ), (2, -60^\circ)$	$(1, -60^\circ), (3, +60^\circ)$
$(2, +60^\circ), (1, -60^\circ)$	$(3, 0^\circ), (2, +60^\circ)$	$(1, -60^\circ), (3, 0^\circ)$
$(2, +60^\circ), (1, +60^\circ)$	$(3, 0^\circ), (2, 0^\circ)$	$(1, -60^\circ), (3, -60^\circ)$

$(3, +60^\circ), (1, +60^\circ)$	$(1, 0^\circ), (2, 0^\circ)$	$(2, -60^\circ), (3, -60^\circ)$
$(1, 0^\circ), (1, +60^\circ)$	$(2, -60^\circ), (2, 0^\circ)$	$(3, +60^\circ), (3, -60^\circ)$
$(4, 0^\circ), (4, +60^\circ)$	$(4, -60^\circ), (4, 0^\circ)$	$(4, +60^\circ), (4, -60^\circ)$
$(4, 0^\circ), (3, 0^\circ)$	$(4, -60^\circ), (1, -60^\circ)$	$(4, +60^\circ), (2, +60^\circ)$
$(4, 0^\circ), (3, -60^\circ)$	$(4, -60^\circ), (1, +60^\circ)$	$(4, +60^\circ), (2, 0^\circ)$
$(4, 0^\circ), (3, +60^\circ)$	$(4, -60^\circ), (1, 0^\circ)$	$(4, +60^\circ), (2, -60^\circ)$
$(4, 0^\circ), (1, 0^\circ)$	$(4, -60^\circ), (2, -60^\circ)$	$(4, +60^\circ), (3, +60^\circ)$
$(4, 0^\circ), (1, -60^\circ)$	$(4, -60^\circ), (2, +60^\circ)$	$(4, +60^\circ), (3, 0^\circ)$
$(4, 0^\circ), (1, +60^\circ)$	$(4, -60^\circ), (2, 0^\circ)$	$(4, +60^\circ), (3, -60^\circ)$
$(4, -60^\circ), (4, +60^\circ)$	$(4, +60^\circ), (4, 0^\circ)$	$(4, 0^\circ), (4, -60^\circ)$
$(4, -60^\circ), (3, 0^\circ)$	$(4, +60^\circ), (1, -60^\circ)$	$(4, 0^\circ), (2, +60^\circ)$
$(4, -60^\circ), (3, -60^\circ)$	$(4, +60^\circ), (1, +60^\circ)$	$(4, 0^\circ), (2, 0^\circ)$
$(4, -60^\circ), (3, +60^\circ)$	$(4, +60^\circ), (1, 0^\circ)$	$(4, 0^\circ), (2, -60^\circ)$
$(4, -60^\circ), (1, 0^\circ)$	$(4, +60^\circ), (2, -60^\circ)$	$(4, 0^\circ), (3, +60^\circ)$
$(4, -60^\circ), (1, -60^\circ)$	$(4, +60^\circ), (2, +60^\circ)$	$(4, 0^\circ), (3, 0^\circ)$
$(4, -60^\circ), (1, +60^\circ)$	$(4, +60^\circ), (2, 0^\circ)$	$(4, 0^\circ), (3, -60^\circ)$
$(4, +60^\circ), (3, 0^\circ)$	$(4, 0^\circ), (1, -60^\circ)$	$(4, -60^\circ), (2, +60^\circ)$
$(4, +60^\circ), (3, -60^\circ)$	$(4, 0^\circ), (1, +60^\circ)$	$(4, -60^\circ), (2, 0^\circ)$
$(4, +60^\circ), (3, +60^\circ)$	$(4, 0^\circ), (1, 0^\circ)$	$(4, -60^\circ), (2, -60^\circ)$
$(4, +60^\circ), (1, 0^\circ)$	$(4, 0^\circ), (2, -60^\circ)$	$(4, -60^\circ), (3, +60^\circ)$
$(4, +60^\circ), (1, -60^\circ)$	$(4, 0^\circ), (2, +60^\circ)$	$(4, -60^\circ), (3, 0^\circ)$
$(4, +60^\circ), (1, +60^\circ)$	$(4, 0^\circ), (2, 0^\circ)$	$(4, -60^\circ), (3, -60^\circ)$
$(1, 0^\circ), (1, -60^\circ)$	$(2, -60^\circ), (2, +60^\circ)$	$(3, +60^\circ), (3, 0^\circ)$
$(3, 0^\circ), (1, 0^\circ)$	$(1, -60^\circ), (2, -60^\circ)$	$(2, +60^\circ), (3, +60^\circ)$
$(3, 0^\circ), (1, -60^\circ)$	$(1, -60^\circ), (2, +60^\circ)$	$(2, +60^\circ), (3, 0^\circ)$
$(3, 0^\circ), (1, +60^\circ)$	$(1, -60^\circ), (2, 0^\circ)$	$(2, +60^\circ), (3, -60^\circ)$
$(3, -60^\circ), (3, +60^\circ)$	$(1, +60^\circ), (1, 0^\circ)$	$(2, 0^\circ), (2, -60^\circ)$
$(3, -60^\circ), (1, 0^\circ)$	$(1, +60^\circ), (2, -60^\circ)$	$(2, 0^\circ), (3, +60^\circ)$
$(3, -60^\circ), (1, -60^\circ)$	$(1, +60^\circ), (2, +60^\circ)$	$(2, 0^\circ), (3, 0^\circ)$
$(3, -60^\circ), (1, +60^\circ)$	$(1, +60^\circ), (2, 0^\circ)$	$(2, 0^\circ), (3, -60^\circ)$
$(3, +60^\circ), (1, 0^\circ)$	$(1, 0^\circ), (2, -60^\circ)$	$(2, -60^\circ), (3, +60^\circ)$
$(3, +60^\circ), (1, -60^\circ)$	$(1, 0^\circ), (2, +60^\circ)$	$(2, -60^\circ), (3, 0^\circ)$
$(3, 0^\circ), (3, -60^\circ)$	$(2, -60^\circ), (2, +60^\circ)$	$(4, +60^\circ), (4, 0^\circ)$

dvojice dlaždice	typ (kolem 1)	typ (kolem 2)	typ (kolem 3)	typ (kolem 4)
$(2, 0^\circ), (2, -60^\circ)$	A	B	C	D
$(4, 0^\circ), (4, -60^\circ)$	A	D	B	C
$(3, 0^\circ), (3, +60^\circ)$	A	D	B	C
$(2, 0^\circ), (2, +60^\circ)$	A	C	D	B
$(1, -60^\circ), (1, +60^\circ)$	A	C	D	B
$(2, +60^\circ), (2, -60^\circ)$	A	C	D	B
$(2, 0^\circ), (4, 0^\circ)$	A	D	B	C
$(2, 0^\circ), (4, -60^\circ)$	A	D	B	C
$(2, 0^\circ), (4, +60^\circ)$	A	D	B	C
$(2, 0^\circ), (3, 0^\circ)$	A	C	D	B
$(2, 0^\circ), (3, -60^\circ)$	A	C	D	B
$(2, 0^\circ), (3, +60^\circ)$	A	C	D	B
$(2, 0^\circ), (1, 0^\circ)$	A	C	D	B
$(2, 0^\circ), (1, -60^\circ)$	A	D	B	C
$(2, 0^\circ), (1, +60^\circ)$	A	D	B	C
$(2, -60^\circ), (4, 0^\circ)$	A	D	B	C
$(2, -60^\circ), (4, -60^\circ)$	A	C	D	B
$(2, -60^\circ), (4, +60^\circ)$	A	C	D	B
$(2, -60^\circ), (3, 0^\circ)$	A	C	D	B
$(2, -60^\circ), (3, -60^\circ)$	A	D	B	C
$(2, -60^\circ), (3, +60^\circ)$	A	D	B	C
$(2, -60^\circ), (1, 0^\circ)$	A	D	B	C
$(2, -60^\circ), (1, -60^\circ)$	A	B	C	D
$(2, -60^\circ), (1, +60^\circ)$	A	B	C	D
$(2, +60^\circ), (4, 0^\circ)$	A	B	C	D
$(2, +60^\circ), (4, -60^\circ)$	A	B	C	D
$(2, +60^\circ), (4, +60^\circ)$	A	C	D	B
$(2, +60^\circ), (3, 0^\circ)$	A	B	C	D
$(2, +60^\circ), (3, -60^\circ)$	A	B	C	D
$(2, +60^\circ), (3, +60^\circ)$	A	B	C	D
$(2, +60^\circ), (1, 0^\circ)$	A	B	C	D
$(2, +60^\circ), (1, -60^\circ)$	A	B	C	D
$(2, +60^\circ), (1, +60^\circ)$	A	B	C	D

$(3, +60^\circ), (1, +60^\circ)$	A	B	C	D
$(1, 0^\circ), (1, +60^\circ)$	A	B	C	D
$(4, 0^\circ), (4, +60^\circ)$	A	D	B	C
$(4, 0^\circ), (3, 0^\circ)$	A	D	B	C
$(4, 0^\circ), (3, -60^\circ)$	A	C	D	B
$(4, 0^\circ), (3, +60^\circ)$	A	C	D	B
$(4, 0^\circ), (1, 0^\circ)$	A	B	C	D
$(4, 0^\circ), (1, -60^\circ)$	A	B	C	D
$(4, 0^\circ), (1, +60^\circ)$	A	B	C	D
$(4, -60^\circ), (4, +60^\circ)$	A	D	B	C
$(4, -60^\circ), (3, 0^\circ)$	A	D	B	C
$(4, -60^\circ), (3, -60^\circ)$	A	D	B	C
$(4, -60^\circ), (3, +60^\circ)$	A	C	D	B
$(4, -60^\circ), (1, 0^\circ)$	A	C	D	B
$(4, -60^\circ), (1, -60^\circ)$	A	C	D	B
$(4, -60^\circ), (1, +60^\circ)$	A	B	C	D
$(4, +60^\circ), (3, 0^\circ)$	A	B	C	D
$(4, +60^\circ), (3, -60^\circ)$	A	B	C	D
$(4, +60^\circ), (3, +60^\circ)$	A	D	B	C
$(4, +60^\circ), (1, 0^\circ)$	A	D	B	C
$(4, +60^\circ), (1, -60^\circ)$	A	D	B	C
$(4, +60^\circ), (1, +60^\circ)$	A	C	D	B
$(1, 0^\circ), (1, -60^\circ)$	A	C	D	B
$(3, 0^\circ), (1, 0^\circ)$	A	C	D	B
$(3, 0^\circ), (1, -60^\circ)$	A	B	C	D
$(3, 0^\circ), (1, +60^\circ)$	A	B	C	D
$(3, -60^\circ), (3, +60^\circ)$	A	B	C	D
$(3, -60^\circ), (1, 0^\circ)$	A	D	B	C
$(3, -60^\circ), (1, -60^\circ)$	A	D	B	C
$(3, -60^\circ), (1, +60^\circ)$	A	D	B	C
$(3, +60^\circ), (1, 0^\circ)$	A	C	D	B
$(3, +60^\circ), (1, -60^\circ)$	A	C	D	B
$(3, 0^\circ), (3, -60^\circ)$	A	C	D	B

Chování typu ABCD s počátečním obsahem +4 mají tyto kostky: $(3, +60^\circ), (1, +60^\circ)$; $(1, 0^\circ), (1, -60^\circ)$; $(3, +60^\circ), (1, -60^\circ)$; $(3, 0^\circ), (3, +60^\circ)$; $(3, 0^\circ), (1, 0^\circ)$; $(3, 0^\circ), (1, -60^\circ)$; $(3, -60^\circ), (3, +60^\circ)$; $(3, -60^\circ), (1, 0^\circ)$; $(3, -60^\circ), (1, -60^\circ)$; $(3, -60^\circ), (1, +60^\circ)$; $(3, +60^\circ), (1, 0^\circ)$;

Chování typu ADBC s počátečním obsahem +4 mají tyto kostky: $(1, 0^\circ), (1, +60^\circ)$; $(4, 0^\circ), (4, +60^\circ)$; $(4, 0^\circ), (1, 0^\circ)$; $(4, 0^\circ), (1, -60^\circ)$; $(4, 0^\circ), (1, +60^\circ)$; $(4, -60^\circ), (1, 0^\circ)$; $(4, -60^\circ), (1, -60^\circ)$; $(4, -60^\circ), (1, +60^\circ)$; $(4, +60^\circ), (1, 0^\circ)$; $(4, +60^\circ), (1, -60^\circ)$; $(4, +60^\circ), (1, +60^\circ)$;

Chování typu ACDB s počátečním obsahem +4 mají tyto kostky: $(4, 0^\circ), (3, 0^\circ)$;

$(4, 0^\circ), (3, -60^\circ); (4, 0^\circ), (3, +60^\circ); (4, -60^\circ), (4, +60^\circ); (4, -60^\circ), (3, 0^\circ); (4, -60^\circ), (3, -60^\circ);$
 $(4, -60^\circ), (3, +60^\circ); (4, +60^\circ), (3, 0^\circ); (4, +60^\circ), (3, -60^\circ); (4, +60^\circ), (3, +60^\circ);$
 $(3, 0^\circ), (1, +60^\circ);$

Chování typu ABCD s počátečním obsahem +4 mají tyto kostky: $(2, 0^\circ), (2, -60^\circ);$
 $(4, 0^\circ), (4, -60^\circ); (2, 0^\circ), (4, 0^\circ); (2, 0^\circ), (4, -60^\circ); (2, 0^\circ), (4, +60^\circ); (2, -60^\circ), (4, 0^\circ);$
 $(2, -60^\circ), (4, -60^\circ); (2, -60^\circ), (4, +60^\circ); (2, +60^\circ), (4, 0^\circ); (2, +60^\circ), (4, -60^\circ);$
 $(2, +60^\circ), (4, +60^\circ);$

Chování typu AD BC s počátečním obsahem +4 mají tyto kostky: $(3, 0^\circ), (3, +60^\circ);$
 $(2, 0^\circ), (2, +60^\circ); (2, 0^\circ), (3, 0^\circ); (2, 0^\circ), (3, -60^\circ); (2, 0^\circ), (3, +60^\circ); (2, -60^\circ), (3, 0^\circ);$
 $(2, -60^\circ), (3, -60^\circ); (2, -60^\circ), (3, +60^\circ); (2, +60^\circ), (3, 0^\circ); (2, +60^\circ), (3, -60^\circ);$
 $(2, +60^\circ), (3, +60^\circ);$

Chování typu ACDB s počátečním obsahem +4 mají tyto kostky: $(1, -60^\circ), (1, +60^\circ);$
 $(2, +60^\circ), (2, -60^\circ); (2, 0^\circ), (1, 0^\circ); (2, 0^\circ), (1, -60^\circ); (2, 0^\circ), (1, +60^\circ); (2, -60^\circ), (1, 0^\circ);$
 $(2, -60^\circ), (1, -60^\circ); (2, -60^\circ), (1, +60^\circ); (2, +60^\circ), (1, 0^\circ); (2, +60^\circ), (1, -60^\circ);$
 $(2, +60^\circ), (1, +60^\circ);$